This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

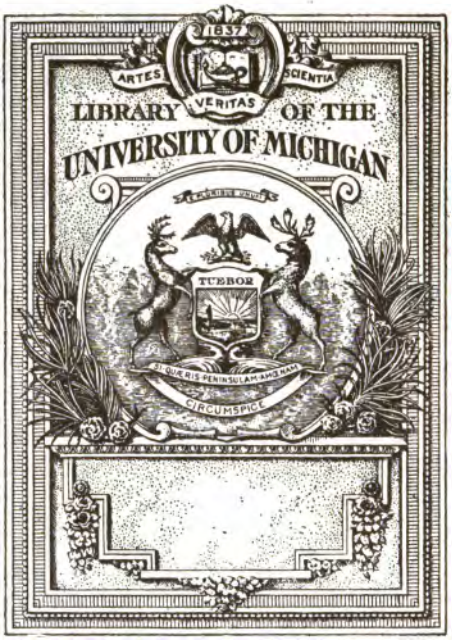
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

A 546945


1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

Cf. Kurstens Math. Abhdlg.

Dieser Band enthält
desselben Verfassers Darstellung
der vollkommen Evidenz und
Schärfe seiner Theorie der
Parallelen Königsberg
bei Hartung 1786.

QA
35
.S387

Entdekte

Theorie der Parallelen

nebst einer

Untersuchung

über den

Ursprung ihrer bisherigen Schwierigkeit

von

M. Johann Schultz,

Königl. Preuß. Hofprediger.

Mit zwo Kupfertafeln.

Königsberg,

gedruckt bey D. C. Kanter, K. Pr. Hofbuchdrucker.

In Commission zu haben bey K. G. Dengel.

1784.

Sr. Excellenz

dem

Königl. Staatsminiſter

Freyherrn von Zedlitz.

331560

Hochgebohrner Freyherr Gnädiger Herr!

Ew. Excellenz vereinigen mit dem erhabenen Namen eines Beschützers der Wißenschaften zugleich den eines Freundes, Vertrauten und Kenners derselben. Alles, was zur gröſsern Aufklärung einer Wißenschaft, oder zur Erwei-

terung ihrer Grenzen dient, ist daher ein Gegenstand, der auf Ew. Excellenz Wohlgefallen sicher rechnen kann.

Dieses macht mir Muth, Ew. Excellenz eine Schrift zu widmen, die hierauf unmittelbar abzweckt, weil sie die Enthüllung eines Geheimnißes darstellt, das auf eine fast unerklärbare Weise in einer Wissenschaft, die in Ansehung der Gründlichkeit und Evidenz für alle übrigen immerfort ein unerreichbares Muster seyn wird,

den-

dennoch bisher unauflöslich geblieben ist. Mit Vergnügen bediene ich mich zugleich dieses Mittels, Ew. Excellenz meine dankvolle Verpflichtung für Höchstdero gnädige Vorsorge öffentlich an den Tag zu legen.

Die Vorsehung erfülle alle die Wünsche, welche die Kirche, der Staat und die Freunde der Wißenschaften für Ew. Excellenz theures Leben und hohe Wohlfarth so lebhaft hegen.

Unter diesen Seegenswünschen empfehle ich Ew. Excellenz hohem Schuz und Gnade mein ferneres Wohl, und verharre mit tiefster Ehrfurcht

Ew. Excellenz

Königsberg,
den 18ten October
1783.

unterthänig gehorsamster
Diener
Johann Schultz.

Vorrede.

Es ist in der Geschichte der menschlichen Vernunft immer eine merkwürdige Erscheinung, daß Wahrheiten, die dem Verstande ganz nahe liegen, demselben gleichwohl durch eine Reihe von Jahrhunderten so verborgen bleiben können, daß auch die gröſten Köpfe ihre Nachsinnen vergebens daran üben, da hingegen Wahrheiten, deren Entwickelung eine lange Kette der mühsamsten Schlüſſe erfordert, nicht selten schon in dem frühesten Zeitalter der Welt entdeckt worden. So ist es in der Geometrie mit der Demonstration der Lehr-

von den Parallelen gegangen. Ich müste einen sehr ausschweifenden Grad von Eigenliebe besizen, wenn ich mich mit den großen Männern, die an der Entdeckung dieser Demonstration vergeblich gearbeitet haben z. E. mit einem Wolf, Hausen, Segner, Käſtner, Karſten und andern meßen wollte. Indeßen hat mir die Vorſehung das Vergnügen gegönnt, nach vielfältigen Verſuchen endlich die ganze Schwierigkeit glücklich zu heben, und jezt dem Publiko von dieſer Lehre nicht nur **eine**, ſondern **drey** verſchiedene Demonſtrationen zu liefern, die ſo ungekünſtelt, ſo kurz, und zugleich ſo evident ſind, daß es faſt unbegreiflich ſcheint, wie ſie der Scharfſinnigkeit der Geometer ſo lange Zeit haben entgehen können. Alle dieſe drey Beweisarten gründen ſich bloß auf dem Princip: **daß die Größe eines ebenen Winkels durch die Größe der Ebene beſtimmt wird, die zwiſchen ſeinen ohne Ende verlängerten Schenkeln liegt** — einem Princip, daran meines Wißens die Geometer niemals gedacht haben,

ob-

obgleich daßelbe unmittelbar aus dem bloßen Begriffe von der Größe des Winkels ganz apodiktisch folgt, ja schon an sich ein so offenbares Axiom ist, daß es fast unnöthige Weitläuftigkeit zu seyn scheint, einen Beweis davon zu geben. Aus dieser Ursache haben sie mit allen in dieser Materie bisher versuchten Beweisen nicht die mindeste Aehnlichkeit. Da ich eine jede meiner drey Beweisarten nunmehr schon über drey Jahre mit aller Strenge und Unpartheilichkeit geprüft habe; so wird man es nicht als Ruhmräthigkeit ansehen, wenn ich zuversichtlich sage, daß ich im ganzen Euklides keinen Beweis kenne, der apodiktischer und evidenter wäre. Es würde daher auch eine eben so übel angebrachte und verstellte Demuth seyn, wenn ich die hier gelieferte Theorie der Parallelen einen bloßen **Versuch** nennen wollte, als wenn Euklides seinen Elementen die Aufschrift: **Versuch** einer Geometrie, hätte geben wollen. Hiedurch greife ich indeßen dem Urtheil meiner Leser so wenig vor, daß

ich

ich sie vielmehr ersuche, eine jede meiner drey Beweisarten aufs strengste zu prüfen. Ich suche Wahrheit. Ein jedes Urtheil, das nicht persönliche Beleidigung, sondern Untersuchung der Sache, nicht dictatorischer Machtspruch, sondern mit wirklichen Gründen belegt ist, soll mir daher, so strenge es immer seyn mag, nicht nur höchst willkommen seyn, sondern auch in dem Vorberichte zu der neuen allgemeinen Theorie der Lage, welche ich, so Gott mir das Leben fristet, ehestens herausgeben werde, die freundschaftlichste Beantwortung finden.

Wenn erst einmal die Theorie der geraden Parallellinien festgestellt ist; so läst sich aus dieser auch die Theorie der parallelen Ebenen vermittelst des **Neigungswinkels** d. i. des ebenen Winkels, deßen Schenkel beide auf der Durchschnittslinie zwoer Ebenen senkrecht sind, und welcher daher das Maaß des sogenannten Flächenwinkels ist, den zwo sich schneidende Ebenen mit einander

der machen, wie bekannt, ohne viele Mühe herleiten. Um indeßen die Fruchtbarkeit des Princips, das meiner Theorie der Parallellinien zum Grunde liegt, desto einleuchtender zu zeigen; so habe ich zugleich erwiesen, daß auch die Größe eines **Flächenwinkels**, den zwo sich schneidende Ebenen machen, bloß durch die Größe des **körperlichen Raums** bestimmt wird, der zwischen den beiden Ebenen ohne Ende fort enthalten ist, und aus diesem Princip die Theorie der parallelen Ebenen auf eine ganz neue Art demonstrirt, ohne, wie gewöhnlich, den Neigungswinkel dabey zu Hülfe zu nehmen.

Da, nach meiner Ueberzeugung, die ganze bisherige Schwierigkeit in der Lehre von den Parallellinien nunmehr auf die angenehmste und befriedigendste Weise völlig gehoben ist; so ist keine Frage natürlicher, als diese: **woher jene Schwierigkeit entstanden und so lange Zeit unauflöslich geblieben ist?** Man wird leicht zugestehen,

gestehen, daß eine Frage von dieser Art sich schwerlich eher hinreichend beantworten läst, als bis erst die Schwierigkeit selbst, nach deren Ursprung man frägt, glücklich gehoben worden. Dieses bewog mich, eine ausführliche Untersuchung dieser Frage vor meiner Theorie der Parallellinien, als Einleitung voranzuschicken, und in derselben zu Vermeidung einer zu weitläuftigen Vorrede zugleich die Geschichte meiner Entdeckung und andere Anmerkungen darüber am bequemen Orte einzurücken. Ich glaubte hiedurch dem mathematischen Forscher einen angenehmen Dienst zu erzeigen, wenn ihm auf diese Weise die Uebersicht der ganzen bisherigen Schwierigkeit bis zu ihren ersten Quellen erleichtert würde, und wie angenehm wäre es mir, wenn es mir geglückt hätte, auch diese mißliche Frage zu Befriedigung der Kenner zu beantworten. Indeßen ist meine Theorie der Parallelen von dieser grösstentheils philosophischen Untersuchung auf keine Weise abhängig, sondern eine jede von meinen

nen drey Beweisarten muß unmittelbar und vollkommen durch sich selbst bestehen, oder sie gilt gar nichts. Aus diesem Grunde kann der Leser, wenn er sich durch gedachte Untersuchung nicht aufhalten will, auch unmittelbar zur Theorie der Pararallellinien fortgehen, und erstere bis zulezt laßen, da in dieser ohnehin ihm manches einleuchtender werden wird, wenn er sich bereits mit der Theorie selbst bekannt gemacht hat.

Möchte doch jede von den Schwierigkeiten, die noch die übrigen Wißenschaften und Kentniße der Menschen drücken, sich eben so evident und apodiktisch auflösen laßen, als die schon fast für unauflöslich gehaltene Schwierigkeit in der Lehre von den Parallellinien nunmehr aufgelöset ist! Doch! dieses wäre für unsern jezigen Raupenstand zu viel begehrt! Dann würden wir nicht bloß in Ansehung der Größenlehre, sondern schon überhaupt im Schauen wandeln. Glück genug für uns, daß wir dieses bey unserer künfti-

gen

gen Entwickelung erwarten können, wenn wir uns hier durch Weisheit und Religion dazu fähig zu machen suchen.

Βλέπομεν γὰρ ἀρτι δι ἐσόπτρου ἐν αἰνιγματι, τότε δὲ πρόσωπον πρὸς πρόσωπον.

Einleitung

über

den Urſprung der bisherigen Schwierigkeit in der Lehre von den Parallellinien.

Die Lehre von den Parallellinien iſt für jeden gründlichen Geometer bisher ein Gegenſtand geweſen, an den er nicht anders, als mit einer Art von Unzufriedenheit denken konnte. Er, der in ſeiner Wißenſchaft gewohnt iſt, alles, was er behauptet, ganz apodiktiſch zu beweiſen, ſahe ſich hier in einer gänzlichen Verlegenheit, und muſte, wenn er nicht ſeine Lehrlinge durch falſche Beweiſe hintergehen wollte, das unangenehme Geſtändniß thun, daß hier eine Lücke bliebe, die kein Geometer ausfüllen könnte. Herr Hofrath Käſtner ſagt hierüber in ſeiner Zuſchrift an Herrn Klügel: Nil igitur ſupereſt,

quam vt *concedi petamus* ab artis noſtrae ſtudioſo, quod ſanus negare nemo poteſt. Ita aperte, vt decet veri puriſſimi cuſtodes, cum illo agimus, et aequitati ejus acceptum ferimus, quod alii nobis magis vafri velut ſummo jure debitum ab eo extorquent.

Nun hat dieſes zwar bey ſolchen Sätzen, auf welchen keine weitere Theorie aufgeführt werden darf, nicht viel auf ſich. Denn in welcher Art von Erkenntnißen giebt es nicht leere Räume, die der menſchliche Verſtand vergeblich auszufüllen ſucht? So verhält es ſich unter andern mit der Schwierigkeit, die ſich bey dem Berührungswinkel des Kreiſes findet. Es iſt unangenehm, die ſonſt ſo harmoniſch denkenden friedfertigen Geometer hier ſo ſehr entzweit zu ſehen, ſehr unangenehm, in einer Wiſſenſchaft, wo ſonſt lauter Evidenz herrſcht, hier nicht nur Dunkelheit, ſondern ſelbſt Widerſprüche zu finden, die, wenn ſie auch bloß ſcheinbar wären, ſich doch bisher nicht auf eine völlig befriedigende Weiſe haben tilgen laßen. Allein geſezt auch, daß dieſe Schwierigkeit nie mit vollkommener Evidenz aufgelöſet würde; ſo leidet doch das Syſtem der Geometrie ſelbſt hiedurch nicht, ſondern dieſes behält ſeine Würde und Feſtigkeit, man mag vom Berührungswinkel des Kreiſes denken, wie man wolle.

Eine

Eine ganz andere Bewandniß aber hat es mit der Lehre von den Parallellinien. Diese ist die Grundlage, auf welcher beinahe das ganze Gebäude der Geometrie ruhet. Ohne diese läßt sich nicht einmal die Möglichkeit eines Quadrats beweisen, und von den Verhältnißen der Linien, Flächen und Körper, die doch das Hauptobject der Geometrie ausmachen, fast gar nichts lehren. So lange daher die Lehre von den Parallellinien nicht apodiktisch erwiesen ist; so ist alle Strenge in den Beweisen der übrigen Säze umsonst, dem ganzen so vortreflich fest verknüpften Gebäude der Geometrie fehlt alsdenn nur das einzige, daß es keinen festen Boden hat, und obgleich die Lehre von den Parallellinien von der Art ist, daß man sich theils in jedem einzelnen Falle von ihrer Wahrheit durch die Erfahrung überführen kann, theils dieselbe auf verschiedne Arten so sehr erläutern kann, daß man keinen Grund vor sich sieht, an ihrer Wahrheit zu zweifeln, und es daher Unvernunft seyn würde, sie nicht zu glauben; so wird hiedurch doch wenigstens die Geometrie entweder zu einer bloßen empirischen Kenntniß herabgewürdiget, oder sie ist höchstens nichts weiter, als ein vernünftiger Glaube, nicht aber, was sie seyn soll, das Ideal einer reinen Vernunftwissenschaft. Darf man sich also wohl wundern, wenn die Geo-

meter von je her sich um eine strenge Demonstration dieser Lehre so sorgfältig bemüht haben, und noch bis jezo die Entdeckung derselben so sehnlich wünschen?

Die Theorie der Parallellinien enthält folgende zwey Hauptheoreme: 1) **Wenn in einer Ebene zwo gerade Linien von einer dritten unter gleichen Wechselwinkeln geschnitten werden; so sind sie parallel, und 2) umgekehrt: Wenn zwo Parallellinien von einer dritten geschnitten werden; so sind allemal die Wechselwinkel gleich.** Eins von diesen beiden Theoremen läßt sich allemal in vollkommenster Schärfe erweisen, man mag die Parallellinien entweder mit dem Euklides durch zwo gerade Linien in der Ebene erklären, die niemals zusammenlaufen (non concurrentes), oder mit Wolf und andern durch solche, die überall gleich weit von einander abstehen (aequidistantes). Versteht man durch Parallellinien nicht zusammenlaufende; so gründet sich das erste Theorem auf folgenden Saz: **Wenn zwo in einem Punkte zusammenstoßende gerade Linien von einer dritten geschnitten werden; so ist allemal auf der Seite, wo der Punkt liegt, der äußere Winkel größer, als der entgegengesezte innere,** das zweite Theorem aber gründet sich alsdenn umgekehrt auf diesen

Saz:

Saz: wenn in einer Ebene zwo gerade Linien von einer dritten so geschnitten werden, daß der äußere Winkel größer ist, als der entgegengesezte innere; so stoßen sie nach der Seite, wo diese Winkel liegen, nothwendig in einem Punkte zusammen. Den erstern von diesen Säzen hat Euklides aufs strengste erwiesen. Daher ist auch das oberwähnte erste Theorem, und zugleich die Möglichkeit der Parallellinien in der Bedeutung, da man sie als nicht zusammenlaufende betrachtet, von ihm mit der größesten Schärfe demonstrirt. Den lezstern dieser Säze aber finden wir im Euklides ohne Beweis in der Reihe der Grundsäze als seinen eilften aufgeführt, folglich beruht die Gewißheit des zweiten Theorems darauf, ob gedachter Saz in der That so evident ist, daß er keines weitern Beweises bedarf, oder ob er wenigstens schon so einfach ist, daß kein strenger Beweis von ihm mehr möglich ist. Allein wenn man die Sache unpartheiisch betrachtet, so kann man keins von beiden behaupten. Was das erstere betrift, so darf man nur die zehn ersten Grundsäze des Euklides lesen. Hier ist völlige Evidenz, und niemand wird Bedenken tragen, sie ohne allen Beweis als feste Wahrheit anzunehmen. Sobald man aber zum eilften kommt, wird man so fort empfinden, daß hier die Evidenz nicht ist, die

in jenen war, und man wird unwiderstehlich den Wunsch in sich fühlen, diesen Saz aus der Claße der Grundsäze in die Claße der Lehrsäze gebracht und strenge erwiesen zu sehen. Was aber das zweite betrift; so wäre es ganz unbegreiflich, wie der gedachte eilfte Grundsaz schon zu einfach seyn sollte, als daß ein Beweis aus einfachern Principien von ihm möglich wäre, indem er eben so zusammengesezt ist, als sein umgekehrter Saz, von welchem Euklides gleichwohl eine so vollkommene und ziemlich zusammengesezte Demonstration gegeben hat. Daher wundere ich mich nicht, wenn schon Proklus es für lächerlich hielt, eine Proposition als Grundsaz anzunehmen, deren conuersa sich strenge erweisen läßt. Und sind nicht die sorgfältigen Bemühungen, welche die grösten Verehrer des Euklides angewandt haben, eine strenge Demonstration für die Lehre von den Parallellinien ausfindig zu machen, ein lautes Geständniß, daß sein eilfter Grundsaz als Grundsaz betrachtet, dem Verstande keine Befriedigung giebt? Denn wäre man mit diesem zufrieden, könnte man denn wohl eine strengere Demonstration für jene Lehre wünschen, als diejenige ist, welche Euklides gegeben hat?

Ein großer Theil der Mathematicker war deshalb bloß bemüht, einen apodiktischen Beweis dieses so

ge-

genannten Grundsazes aufzusuchen, weil, sobald dieser bündig bewiesen ist, dies auch von der ganzen Lehre der Parallellinien gilt. Allein da jeder Versuch hierin fruchtlos war; so glaubte man sich dadurch zu helfen, daß man die Erklärung der Parallellinien änderte und sie nicht mit dem Euklides als zusammenlaufende, sondern als überall gleich weit von einander abstehende Linien betrachtete, und da der berühmte von Wolf diese Erklärung gleichfals annahm; so wurde sie seitdem fast überall herrschend. Allein auch hiedurch gewann man nichts. Denn aus dieser Definition der Parallellinien ließ sich zwar das 2te Hauptheorem strenge beweisen, daß zwo dergleichen Parallellinien von jeder dritten geraden Linie allemal unter gleichen Wechselwinkeln geschnitten werden. Aber nun sahe man sich in Verlegenheit, das erste Theorem zu beweisen, daß zwo gerade Linien, die von einer dritten unter gleichen Wechselwinkeln geschnitten werden, in diesem Sinn parallel seyn. Hiedurch gerieth man in ein noch größeres Gedränge. Denn hier entstand sogar die Frage, ob dergleichen gerade Parallellinien auch überhaupt möglich wären, oder ob nicht vielmehr eine Linie, die von einer geraden gleich weit absteht, eine krumme Linie, und daher der ganze Begriff von überall gleich weit abstehenden geraden Linien ein lee-

res Hirngespinst sey. Alle Mühe, die man anwandte, diese Schwierigkeit zu heben, war gleichfalls umsonst. Auf diese Art schien also die Theorie der Parallellinien ein geometrisches Räthsel zu seyn, dessen Auflösung kaum jemals zu erwarten war.

Bedarf man, um sich hievon zu überzeugen, wohl mehr, als das Urtheil zu lesen, das ein Kästner in der Vorrede der ersten Auflage seiner Anfangsgründe der Arithmetick, Geometrie ꝛc. hierüber fället? „Die Schwierigkeit, sagt er, welche sich bey der „Lehre von den Parallellinien findet, hat mich schon „seit vielen Jahren beschäftiget. Ich glaubte, sie „wäre in Hausens Elementis Matheseos Geom. „Prop. 13. völlig gehoben, der vormalige Prediger „bey der französischen Gemeinde zu Leipzig Mr. Coste „benahm mir diese Zufriedenheit, als er mir ein„mal bey dem Umgange, den er mir oft gönnete, „anzeigte, es sey an dem angeführten Orte vom „Häusen ein Schluß gemacht worden, der nicht fol„ge. Ich entdeckte diesen Fehler bald selbst, und be„mühete mich von der Zeit an, die Schwierigkeit „selbst zu heben, oder Schriftsteller zu finden, die „sie gehoben hätten, aber in beider Absicht vergebens, „ob ich gleich fast eine kleine Bibliothek von einzel„nen Schriften oder Anfangsgründen der Geome„trie

„trie sammlete, wo dieser Gegenſ besonders war
„betrachtet worden.„

Eine ausführliche Anzeige dieſer Schwierigkeiten selbſt aber, und die wichtigſten Bemühungen der Gelehrten, ſie zu heben, findet man in der vortreflichen Diſputation, welche der Herr Profeßor Klügel in Helmſtädt 1763 unter der Aufſchrift: Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonſtrandi recenſio herausgegeben. Hier trift man 28 Verſuche verſchiedener zum Theil ſehr groſſer Gelehrten an, die er alle gründlich geprüft und widerlegt hat. Bey dieſer Lage der Sachen ſchien es alſo beinahe Verwegenheit, noch weitere Verſuche zur Entdeckung eines Beweiſes zu wagen, der einem jeden, der ſich darum bemühet, mißlungen war. Dieſer Gedanke unterdrückte auch lange Zeit jeden Trieb in mir, irgend einen Selbſtverſuch in dieſer Materie zu unternehmen, bis ich 1779 eine Göttingiſche Anzeige von einem Verſuch einer völlig berichtigten Theorie von den Parallellinien zu Geſichte bekam, den der berühmte Herr Hofrath Karſten 1778 beim Antritt ſeines öffentlichen mathematiſch-phyſiſchen Lehramts zu Halle herausgegeben. Aus der gründlichen Recenſion ſahe ich zwar bald ein, daß auch dieſer Verſuch die gewünſchte Befriedigung nicht gewährte. Allein der Gedanke, daß

ein Mathematiker, wie Karsten, doch noch die Hofnung nicht aufgiebt, daß die Theorie der Parallellinien völlig berichtigt werden könne, wirkte so stark auf mich, daß ich mich fest entschloß, mich auch in diese Tiefen so weit zu wagen, als es meine Kräfte verstatteten, um, wenn ich sie auch nicht ergründen könnte, doch wenigstens den Grund auszuspähen, wohey sie dem menschlichen Verstande unergründlich wären. Ich stellte meine Untersuchung auf beiden Wegen an, sowohl nach der Euklideischen, als Wolfischen Erklärung. Natürlich gieng es mir anfangs nicht beßer, als meinen Vorgängern. Mehr als einmal, wenn ich schon am Ziel zu seyn schien, sahe ich mich getäuscht. Je tiefer ich mich indeßen in die Untersuchung wagte, desto mehr wuchs meine Aufklärung über die eigentlichen Hinderniße, die einer völligen Demonstration im Wege lagen. Ich kam auch auf Methoden, die mir die Theorie der Parallellinien noch fast in ein helleres Licht zu sezzen schienen, als die bisher davon bekannten Beweise und Erläuterungen. Allein, sie vermöge der bisher bekannten geometrischen Principien zur vollkommenen Schärfe zu bringen, war alle Mühe fruchtlos. Das einzige, das ich hiedurch gewann, war dieses, daß ich immer mehr überzeugt wurde, daß die Auflösung dieses geometrischen Räthsels auf einem

nem Wege liegen müsse, der bisher von den Geometern noch gar nicht betreten worden. Ich entschloß mich daher, keinen Versuch weiter zu machen, allein damit die schon angewandte Bemühungen doch nicht ganz unnütz wären; so nahm ich mir vor, das Resultat meiner Untersuchungen bekannt zu machen, und zugleich alle die Sätze im Zusammenhange darzustellen, die man in der Geometrie ohne die Theorie der Parallellinien völlig beweisen kann, um hiedurch in der Folge wenigstens neuen unnützen Versuchen vorzubauen. Ich war mit meiner Arbeit schon beinahe fertig, als einsmals die schon viele Jahre lang in mir herrschende Idee sich bey mir erneuerte, ob sich nicht die Größe der ebenen geradlinigten Winkel durch die Größe der zwischen ihnen enthaltenen unbegrenzten Ebene bestimmen ließe, und ob nicht hiedurch die bekannte Schwierigkeit bey dem Berührungswinkel des Kreises völlig gehoben werden könnte. Es gelang mir, beide Punkte völlig ins Reine zu bringen, und nun befand ich mich auf einmal in einem neuen geometrischen Gefilde voll Licht und Klarheit, das ganz neue Aussichten in die Geometrie eröfnete. Ich kam daher natürlich auf die Vermuthung, ob nicht auf diesem bisher unbebautem Felde auch die wahre Theorie der Parallellinien zu suchen wäre. Nach einigen

Ver-

Versuchen schien es mir fast, daß für diese auch hier nichts zu erwarten wäre, und schon wollte ich eines Tages, nach sehr scharfem Nachdenken hierüber, alle weitere Untersuchung gänzlich aufgeben, als mitten unter diesen Gedanken plözlich die Idee eines ganz leichten Beweises für den kritischen eilften Grundsaz des Euklides in mir entstand, der mir so apodiktisch vorkam, als es irgend ein geometrischer Beweis seyn kann. In einer Art von Bestürzung ging ich an meinen Schreibtisch, brachte den Beweis zu Papier, und sahe das große Räthsel der Geometer auf eine so vollkommen helle, evidente, und zugleich so leichte und kurze Art aufgelöst, als man es wohl nie hätte vermuthen können.

Aber eben diese unerwartete Leichtigkeit, Simplicität und Kürze des Beweises hatte die Wirkung, daß ich kaum meinem Bewußtseyn traute. Ich fing daher an, denselben auf alle ersinnliche Art zu prüfen, und fand ihn nicht nur überall ganz strenge bestätigt, sondern ich fand auch außer einem zweiten strengen Beweise für den eilften Euklideischen Grundsaz, daß der sogenannte kleinere Pythagorische Lehrsaz von der Gröse der drey Winkel im Dreyeck, ganz unabhängig von der Theorie der Parallellinien, sich aufs schärfste und einleuchtendste unmittelbar aus der Natur der Winkel, nach eben

den

den Principien herleiten ließ, und daß hieraus die ganze Theorie der Parallellinien auch in dem Sinne, da man sie als aequidistantes betrachtet, in der größten Schärfe erwiesen werden kann. So hatte ich also von einer Lehre, an deren Beweise man seit Jahrtausenden umsonst gearbeitet hat, nun auf einmal drey verschiedne ganz strenge Beweisarten.

Gern hätte ich alles dieses so fort niedergeschrieben und der Preße übergeben. Allein da meine anderweitigen Geschäfte mir hiezu keine Zeit ließen; so eilte ich wenigstens so fort unterm 11ten May 1780 im 38sten Stück der hiesigen gelehrten und politischen Zeitungen eine **vorläufige Anzeige des entdeckten Beweises für die Theorie der Parallellinien herauszugeben.** Hier trug ich schon die 4 ersten Lehrsätze nebst dem siebenten meiner ersten Beweisart vor, und versprach zugleich ehestens die ganze Materie in einem Versuche über die ersten Anfangsgründe der Geometrie vollständig abzuhandeln. Die Lage meiner Verrichtungen aber hat mir die Erfüllung dieses Versprechens bis jezt unmöglich gemacht. Indeßen habe ich dadurch den Vortheil erlangt, daß ich mittlerweile nicht nur meine drey Beweisarten deßo schärfer beurtheilet, und mich von der Richtigkeit derselben deßo fester habe versichern können, sondern daß ich auch hoffen

kann,

kann, die Behandlung der Materie jezt vollkommner zu liefern, als sie beim ersten Durchdenken ausgefallen wäre. So wird es hoffentlich jedem Freunde der Geometrie angenehm seyn, im 5ten Lehrsaze meiner ersten Beweisart den 16ten Saz des Euklides nach eben der Methode erwiesen zu sehen, nach welcher ich seinen eilften Grundsaz, der von jenem der umgekehrte ist, erwiesen habe. Und da die Betrachtung der Winkelflächen in der Geometrie noch eine ungewohnte Sache ist, so wird dieses zugleich dienen, sich die richtige Vorstellung meiner Beweismethode desto mehr zu erleichtern.

Es scheint mir überhaupt ungezweifelt zu seyn, daß, wenn ein Saz sich umkehren läst, sowohl der directe Saz, als der umgekehrte, beide aus einerley Principiis und nach einerley Methode erweislich seyn müßen, indem das Umkehren des Sazes weder in den Begriffen selbst, noch in ihrer Verbindung das geringste ändert. So ist es z. E. mit dem Saz, daß im gleichschenklichten Dreieck die Winkel an der Grundlinie gleich sind. Wenn daher die Beweisart des einen für den andern nicht paßt; so urtheile ich, daß dieselbe nicht die nächste sey, die unmittelbar aus der Natur des Sazes fließt, sondern schon zu den entferntern und gekünstelten Beweisarten gehöre, so bündig sie auch an sich immer

seyn

seyn mag. So urtheile ich auch von dem Beweis des Euklides in Ansehung seines 16ten Sazes. Da an dessen möglicher Umkehrung niemand zweifelt, und gleichwohl nach eben der Methode, nach welcher Euklides ihn directe bewiesen, er umgekehrt auf keine Art erweislich ist; so schloß ich daraus sicher, daß die Euklideische Beweisart, ungeachtet aller ihrer Schärfe, doch schon zu den entferntern gehöre, dergleichen es bey vielen Säzen der Geometrie sehr verschiedene giebt, und daß also von diesem Saze noch ein weit simplerer Beweis unmittelbar aus der Natur der Winkel möglich seyn müste, der wenn er einmal entdeckt würde, auch nothwendig auf den umgekehrten Saz anwendbar seyn müste. Die Methode des berühmten von Segners, der diese beiden Säze wirklich auf diesem gleichförmigen Wege unmittelbar aus dem Begriff der Winkel herzuleiten suchte, bestätigte mich in meiner Meinung völlig, und obgleich seine Beweise nicht die erforderliche Schärfe haben, so muß ich doch gestehen, daß mir diese Einheit seiner Beweise für den directen und umgekehrten Saz immer außerordentlich gefallen, und daß ich den Ort, den Segner diesen beiden Säzen in der Geometrie anwies, beständig für den besten und natürlichsten gehalten habe. Um so viel angenehmer ist es mir also, daß mein entdeckter Beweis

weis eben von der Art ist, wie ich immer glaubte, daß derselbe, wenn er jemals entdeckt würde, seyn müsste. So sehr werth mir daher auch meine dritte Beweisart ist; so gebe ich doch in einem Lehrbegriffe der Geometrie, meiner ersten und zweiten Beweisart den Vorzug, und unter diesen besonders der ersten, weil hier die Einheit in den Beweisen der beiden Säze die vollkommenste ist. Ein nicht wenig merkwürdiger Umstand aber ist es noch, daß der bisher so schwierige, ja fast für unmöglich gehaltene Beweis des eilften Euklideischen Grundsazes noch um ein merkliches einfacher und leichter ist, als der nach eben dieser Methode geführte Beweis seines 16ten Sazes. Da man also für den leztern schon so frühe eine strenge Demonstration gefunden hat; hätte denn wohl die Demonstration des erstern so spät verborgen bleiben können, wofern dieser aus den bisher bekannten Principien der Geometrie, ohne die Flächen der Winkel in Betrachtung zu ziehen, möglich wäre?

Ein neuer Vorzug meiner Beweismethode besteht darin, daß sie außer den Parallellinien mit eben der Evidenz und Leichtigkeit auch auf die Theorie der parallelen Ebenen anwendbar ist. Auf eben die Art, wie die Größe der ebenen geradlinigten Winkel sich durch die Größe der zwischen ihren Schenkeln enthaltenen

haltenen unbegrenzten Ebenen bestimmen läßt, läßt sich auch die Größe der Flächenwinkel, welche zwey Ebenen, die sich in einer geraden Linie schneiden, mit einander machen, durch die Größe des zwischen diesen Ebenen enthaltnen unbegrenzten körperlichen Raums bestimmen. Und hieraus kann man nach eben der Methode, wie bey den Parallellinien, die ganze Theorie der parallelen Ebenen aufs schönste und evidenteste erweisen. Die neue Vorstellung, die man hiedurch von der Lage der Ebenen gegen einander erhält, ist so unerwartet anschaulich, daß sie einem Freunde der Geometrie unmöglich gleichgültig seyn kann.

Ein noch wichtigerer Vortheil aber, den die Betrachtung der Winkelflächen gewähret, ist dieser, daß sich aus derselben auch die so lange gewünschte allgemeine Theorie der Lage für alle mögliche Linien und Flächen, auf eine bündige und evidente Weise herleiten, und eben hieraus zugleich der ganze berühmte Streit in Absicht auf den Berührungswinkel des Kreises und den Winkel des Halbkreises, sich vollkommen heben läßt. Ich war daher anfangs willens, die Anfangsgründe dieser noch ganz neuen Lehre der gegenwärtigen Abhandlung sogleich beyzufügen. Allein da diese Materie meine Theorie der Parallellinien nicht im mindesten affi-

cirt, ob ich gleich beide aus eben derselben Quelle herleite, so habe ich in der Folge Bedenken getragen, die Aufmerksamkeit meiner Leser durch zu verschiedne neue Materien zu theilen, und daher die allgemeine Theorie der Lage, nebst der versprochenen Auflösung der übrigen vornehmsten mathematischen Schwierigkeiten, versparen wollen, bis erst unpartheiische Urtheile von Kennern die Schärfe meiner Theorie der Parallellinien entschieden haben. So viel muß ich indessen zum Voraus anzeigen, daß die Euklideische Angabe von der Größe beider vorerwähnten Winkel, nach meiner Theorie der Lage, in der That unrichtig ist, und daher in dem hitzigen Streite, den vormals Clavius und Peletarius hierüber führten, keiner Recht hat. Hiedurch fällt also die Verwunderung weg, warum diese Schwierigkeit bisher noch nie auf eine befriedigende Weise hat gehoben werden können, indem die daraus entstehenden Widersprüche nicht, wie man bisher geglaubt hat, bloß scheinbare, sondern wahre Widersprüche sind, die aus einer unrichtigen Behauptung nothwendig entstehen müssen. Die wahre Größe beider Winkel wird meine Theorie der Lage lehren, und hier fallen alle Schwierigkeiten auf einmal von selbst weg.

Das

Das Angeführte zeigt schon hinreichend, welch ein fruchtbares Feld von ganz neuen geometrischen Untersuchungen die bisher ungenuzte Betrachtung der Winkelflächen dem Mathematiker eröfnet. Zugleich aber wird hiedurch begreiflich, woher die Theorie der Parallellinien so lange nothwendig mangelhaft bleiben, und alle Mühe, die dabey vorkommende Schwierigkeit gründlich zu heben, ganz und gar mißlingen muste. Man hat über die Ursache, wo diese Schwierigkeit eigentlich herrühre, verschiedene Gedanken geäußert. Der gelehrte und verdienstvolle Herr Professor Büsch setzt in seiner Encyklopädie in dem Abschnitte, der von den mathematischen Wißenschaften handelt, S. 28. 29. die Ursache darin, „weil der Geometer sich hier in dem für ihn „seltnen Fall befinde, in welchem sich der Philo„soph jedesmal befindet, wenn er Evidenz suche, daß „er nicht nur Eigenschaften des Objects, die unter vorausgesezter Existenz deßelben folgen, sondern auch die Existenz des Subjects selbst beweisen soll. Er kann, sagt er, die Bestimmungsgründe der Parallellinien, er kann auch die ersten Erscheinungen an den für parallel angenommenen geraden Linien deswegen nicht bündig beweisen, weil „der Beweis die Wahrheit seines Begrifs von den „parallelen geraden Linien voraussezt; weil er

„nicht blos die Möglichkeit deßelben, sondern auch „die Wirklichkeit und die nothwendige Verbindung „der beiden Eigenschaften, parallel (die Linien mö„gen nun non concurrentes oder aequidistantes „heißen) und gerade, in eben demselben Subjekt „vorher beweisen muß.„

Allein wider diese Meinung hat bereits der Herr Professor Hindenburg im zweiten Stück des Leipziger Magazins zur Naturkunde, Mathematik und Oekonomie 1781. S. 156. 157. sehr gründlich erinnert, daß die oberwähnte Schwierigkeit offenbar nur diejenigen Beweise drückt, bey welchen die von des Euklides seiner verschiedne Erklärung der Parallellinien zum Grunde liegt, indem Euklides bey der von ihm angenommenen Definition der Parallellen, ihre Möglichkeit vermittelst des 27sten und 28sten Satzes aufs strengste dargethan hat, wie ich oben schon selbst angemerkt habe. Außerdem aber kann ich dem Herrn Professor Büsch auch hierin nicht beypflichten, daß der Fall, wo der Geometer die Möglichkeit und Existenz des Subjekts, von dem er handelt, vorher beweisen muß, für ihn ein seltener Fall seyn sollte. Nach meiner Einsicht muß der Geometer dieses vielmehr allemal und in jedem Falle thun. Er mag ein geometrisches Object erklären, welches er will; so ist es

seine

seine Pflicht, die Möglichkeit und Existenz seines Begrifs zu beweisen, und so die Realität seines Begrifs darzuthun. Bloß hiedurch steht die Geometrie in dem Besitz der völligen Gewißheit, daß unter allen ihren Begriffen kein einziger ein leeres Hirngespinst, oder ein bloßes Geschöpf der Einbildungskraft ist. Denn sobald sich so etwas hier einschleichen wollte; so ruft sogleich ein jeder: wie kommst du hieher? Man setze z. E. es wollte jemand von einem Punkte reden, der von drey Punkten einer geraden Linie gleich weit abstünde; so würde ihm sogleich ein jeder Geometer zurufen: du redest von einem Undinge. Ja der Geometer muß noch weiter gehen. Nicht genug, daß er die Möglichkeit seines Objects überhaupt beweist, er ist so gar in jedem Falle ohne alle Ausnahme verpflichtet, zugleich die Art und Weise zu zeigen, wie sein Object möglich ist. So ist es z. E. wenn der Geometer von der Hälfte, dem dritten, vierten Theil einer Linie redet, noch lange nicht genug, daß er bloß aus der unendlichen Theilbarkeit der Linie, und dem Begrif der Zahl überhaupt zeigt, daß von jeder Linie ein zweiter, dritter, vierter Theil ꝛc. möglich seyn muß, sondern es ist außerdem noch seine Pflicht zu zeigen, wie und auf welche Art eine jede Linie in zwey, drey, vier und mehrere gleiche Theile getheilt.

werden kann. Diese Pflicht hat Euklides durchgehends aufs strengste beobachtet. In der ganzen ebenen Geometrie sind nur drey Begriffe, deren Möglichkeit er ohne Beweis postulirt, d. i. als praktische Grundsäze voraussezt, die schon zu einfach und evident sind, als daß man ihre Möglichkeit erst erweisen dörfte, nemlich; die Möglichkeit einer geraden Linie, die Möglichkeit ihrer Verlängerung nach beiden Seiten ohne Ende fort, und die Möglichkeit eines Kreises. Bey allen übrigen Begriffen, thut er nicht etwa bloß ihre Möglichkeit überhaupt, sondern zugleich die Art ihrer Möglichkeit aufs strengste dar. z. E. wenn er das Dreyek erklärt; so zeigt er nicht bloß, daß Dreyeke möglich sind, sondern auch, unter welchen Bedingungen und wie sie möglich sind. Eben so, wenn der Herr Hofrath Käſtner das Prisma erklärt; so zeigt er nicht etwa bloß überhaupt, daß prismatische Körper möglich sind, sondern er bestimmt und beweist zugleich die Art, wie sie möglich sind.

Es hat mich daher beständig befremdet, wie nicht nur Metaphysiker, sondern selbst Mathematiker von der Geometrie dergestalt urtheilen, als ob alle geometrische Begriffe bloß willkührliche Begriffe, und daher alle Säze der Geometrie bloß hypothetisch, d. i. nur unter Voraussezung der in ihnen enthalten

nen

nen Begriffe wahr wären, so, als ob z. E. der Satz: in jedem geradlinigten Dreyeck ist nicht mehr, als ein rechter Winkel möglich, bloß diesen Sinn hätte: wenn geradlinigte Dreyecke, und rechte Winkel möglich sind; so ist in einem solchen Dreyecke nicht mehr, als ein rechter Winkel möglich. Denn da der Geometer von jedem seiner Begriffe nicht nur die Möglichkeit überhaupt, sondern sogar die Art derselben aufs schärfste beweiset; so müste, wenn jene Behauptung wahr seyn sollte, nothwendig die Ursache bloß darin liegen, daß der Begrif vom Raum und der Ausdehnung, auf welchen sich alle Begriffe der Geometrie gründen, an sich selbst bloß ein willkührlicher Begrif, oder ein blosses Geschöpf der Einbildungskraft sey. Aber wenn dieses ist, wie käme es denn, daß man nicht auch die übrigen geometrischen Begriffe nach Willkühr einrichten, und z. E. ein geradlinigtes Zweyeck, oder ein geradlinigtes Dreyeck mit zween rechten Winkeln, oder eine krumme Linie, die von einer geraden überall gleich weit abstünde, denken könnte? Ja wie käme es dann, daß wir nicht auch einen Raum von mehr, als drey Dimensionen denken könnten? Auf der andern Seite aber ist hieraus noch mehr offenbar, daß die Schwierigkeit in der Lehre von den Parallellinien darin nicht liegen konnte, weil der Geome-

ger sich hier gedrungen sähe, erst die Möglichkeit gerader überall gleich weit von einander abstehender Linien zu beweisen. Denn sonst müßte sich bey allen geometrischen Sätzen eben dieselbe Schwierigkeit finden, weil der Geometer nicht befugt ist, einen einzigen Begrif anzunehmen, dessen Möglichkeit nicht entweder postulirt, oder strenge erwiesen werden kann. Und widerlegt sich nicht hiedurch die so sinnreich scheinende Meinung von selbst, als ob der Vorzug der Geometrie vor der Metaphysik, in Ansehung der Evidenz ihrer Wahrheiten, darin läge, weil der Metaphysiker erst die Möglichkeit und Existenz seines Subjects beweisen muß, und als ob daher der Geometer mit dem Metaphysiker hierin einerley Schikſal hätte, so oft er sich in gleicher Lage befände? Denn in dieser Lage befindet sich der Geometer immer, er muß jedesmal nicht nur die Möglichkeit seines Objects überhaupt, sondern sogar die Art derselben aufs strengste erweisen, also müßte er in Ansehung der Evidenz seiner Sätze mit dem Metaphysiker beständig einerley Schikſal haben. Allein dieses hat er nie, sondern sein Vortheil, den er vor dem Metaphysiker hat, besteht vielmehr darin, daß er die Möglichkeit seines Objects nicht nur eben so bündig, sondern auch eben so evident, als alle übrige Bestimmungen desselben

er-

erweisen kann. Kann er dieses nicht; so ist sein Object entweder ein leeres Hirngespinst (und alsdann hat er den Vortheil, daß er dieses leicht ausmitteln kann), oder es ist ein sicheres Zeichen, daß es ihm zur Zeit noch bloß an den wahren Prämissen zu seinem Beweise fehlt, und es bleibt ihm also noch immer die Hofnung übrig, daß der schwierig scheinende Beweis künftig einmal in seiner völligen Evidenz ausfindig gemacht werden kann. Die Theorie der Parallellinien, welche ich hier liefere, ist ein sehr auffallendes und offenbares Beispiel hievon.

Alle drey Beweisarten derselben zeigen klar, wie sowenig und evident sich auch die Möglichkeit und Existenz gerader paralleler Linien, in dem Sinn, da man letztere als aequidistantes betrachtet, erweisen läßt, und wie daher die ganze bisherige Schwierigkeit nur darin bestanden, daß man zur Zeit die wahren Prämissen zu diesem Beweise nicht kannte, und diesen also auf unrechten Wegen suchte. In dieser Lage aber befindet sich der Metaphysiker niemals. Dieser müßte seinen Gegenstand sehr wenig kennen, wenn er sich z. E. die Hofnung machen wollte, daß die Möglichkeit einfacher Wesen, oder die Möglichkeit des vollkommensten Wesens irgend jemals mit einer völligen geometrischen Evidenz bewiesen werden würde. Doch dieses ist noch nicht

genug, sondern der Geometer hat noch den Vortheil, daß, wenn es ihm auch in einem gewissen Falle schwer würde, die Möglichkeit seines Gegenstandes in völliger Schärfe und Evidenz zu beweisen, er gleichwohl, wenn er diese Möglichkeit einmal als gewiß voraussetzt, alsdenn alle übrigen Bestimmungen seines Gegenstandes mit der vollkommensten Evidenz und Schärfe darthun kann. So ist es z. E. mit geraden Linien, die überall gleich weit von einander abstehen. Gesetzt, der Geometer wäre nie dazu gekommen, die Möglichkeit solcher Linien strenge zu beweisen, man erlaube ihm aber nur, sie als ungezweifelte Wahrheit vorauszusetzen, oder zu postuliren; alsdenn ist er sogleich im Stande, alle übrige Bestimmungen derselben mit der größten Evidenz und Schärfe darzuthun. Denn sobald man ihm zugesteht, daß durch jeden Punkt, der außerhalb einer geraden Linie liegt, eine gerade Linie möglich ist, die von jener in allen ihren Punkten gleich weit absteht; so kann er sofort ganz strenge beweisen, daß die drey Winkel eines Dreyecks so groß sind, als zween rechte, und hieraus folgt alsdenn, wie meine dritte Beweisart zeigt, die ganze Theorie der Parallellinien ungezwungen. Allein wie weit bleibt auch in diesem Punkte der Metaphysiker hinter dem Geometer zurück. Man schenke

diesem

diesem immer den Beweis von der Möglichkeit und Existenz seines Objects; so wird es gleichwohl ganz vergebliche Mühe seyn, wenn er bey den übrigen Bestimmungen desselben, in Ansehung der Evidenz mit dem Geometer wetteifern wollte. Man lasse ihm z. E. seine Definition der Seele, daß sie eine denkende, immaterielle und einfache Substanz sey, unangetastet. Man gebe ihm nicht nur die Möglichkeit, sondern auch die Existenz dieses seines Subjects als apodiktische und ungezweifelte Wahrheit zu, und nun versuche er, ob er die übrigen Bestimmungen der Seele z. E. ihr Commerz mit dem Körper, oder ihre Unsterblichkeit mit eben der Evidenz beweisen kann, mit welcher der Geometer die ganze Theorie der Parallellinien beweiset, so bald ihm die Möglichkeit gerader überall gleich weit von einander abstehender Linien zugegeben wird.

Es ist also wohl ungezweifelt, daß die so reizende Evidenz, die der reinen Mathematik und besonders der Geometrie eigenthümlich ist, einen ganz andern Grund haben muß, als den, weil der Mathematiker nicht, wie der Philosoph, erst die Möglichkeit seines Objects zu beweisen nöthig hätte. Meiner Meinung nach ist der wahre Grund dieser Evidenz wohl kein anderer, als den unser berühmter Herr Professor Kant in seiner Critik der reinen Vernunft

S. 712—738 ausführlich entwickelt hat, nämlich: der wesentliche Unterschied zwischen der philosophischen und mathematischen Erkenntniß, besteht in der ganz verschiednen Form dieser beiden Erkenntniße. Der Philosoph schließt blos aus Begriffen, der Mathematiker dagegen konstruirt seine Begriffe, d. h. er stellt sie sogleich in concreto in einer reinen Anschauung a priori dar. Dies kann er thun, weil alle seine Begriffe a priori schon eine reine Anschauung in sich enthalten, nämlich alle Begriffe von Zahlen enthalten den Begrif der Zeit, und alle Begriffe der Geometrie enthalten den Begrif des Raums in sich. Raum und Zeit aber sind reine Anschauungen a priori, nämlich die Form, unter welcher wir alle Erscheinungen ordnen, und unter welcher wir allein so wohl innere, als äußere Anschauungen haben können. Daher ist die mathematische Vernunfterkenntniß intuitiv, mithin evident. Die philosophische dagegen, welche sich blos an allgemeinen Begriffen hält, ohne sie construiren zu können, ist blos discursiv, mithin kann sie auf die Evidenz von jener gar keine Ansprüche machen. Der Grund der mathematischen Evidenz liegt also eigentlich blos in der Form, oder der Art, wie der Mathematiker seine Begriffe behandelt, jedoch aber (welches ich hinzuzusetzen nöthig glaube) zugleich

in

in der Materie, oder dem Inhalt dieser Begriffe in so fern, weil diese Begriffe von der Art sind, daß sie sich construiren, oder anschauend machen lassen, denn sonst könnte der Mathematiker über seine Begriffe so wenig, als der Philosoph die seinigen, nach der angezeigten Form behandeln und in concreto in einer reinen Anschauung darstellen.

Daß aber die Form oder die Behandlung der Begriffe vermittelst ihrer Construction der eigentliche ursprüngliche Grund der Evidenz der Mathematik sey, kann man offenbar daraus sehen, weil diese Evidenz auch selbst bey den Gegenständen der Mathematik sogleich verschwindet, sobald man sie philosophiret, d. i. sie ohne Construction bloß discursiv nach bloßen allgemeinen Begriffen behandelt. So ging es, wie bekannt, dem berühmten Wolf in der Lehre von der Aehnlichkeit der Triangel, da er den Versuch machte, sie metaphysisch zu behandeln. Er glaubte, sie dadurch faßlicher und evidenter zu machen, und die Evidenz verschwand durch diese Behandlung völlig. Auf eine ähnliche Art hat selbst der berühmte von Segner, durch seine discursiven Sätze, die er in der Stereometrie zum Grunde legt, die Evidenz seiner Stereometrie nicht wenig verdunkelt. Eben dies erfähret man auch allemal, wenn man aus bloßen Begriffen einer geraden Linie nach

philo-

Linien I G, A C unter der angenommenen Voraussetzung der Winkel gegen einander haben müssen. Allein wie soll nun diese Bestimmung geschehen?

Nach den bisherigen Principiis der Geometrie hat man kein ander Criterium, die Grösse zweener Winkel, und die Lage ihrer Schenkel zu bestimmen, als wenn man sie in die Lage bringen kann, daß sie beide die Spitze und den einen Schenkel gemein haben, alsdenn liegt der andere Schenkel des grösseren Winkels ausserhalb dem kleinern. Nun mache man die Anwendung auf des Euklides 16ten Satz und auf seinen schwierigen eilften Grundsatz. Da im erstern Fig. 5. angenommen wird, daß die Schenkel I L, A K der Winkel L I B, K A B einander in N schneiden; so ist ihre Lage gegen einander ohne Ende fort völlig bestimmt, und zwar so, daß von dem Schenkel I L nur der kleinste Theil I N innerhalb dem Winkel K A B, der grössere dagegen N L ohne Ende fort ausserhalb demselben liegt. Daher kann hier die Bestimmung nicht schwer seyn, daß der Schenkel I L ausserhalb dem Winkel K A B fallen muß, wenn man den Winkel L I B in die Lage bringt, daß seine Spitze I in A und sein Schenkel I B in AB fällt. Denn man stelle sich nach der Methode des Herrn G. Segner vor, der Winkel L I B würde bey stets unverändertes Grösse auf A B nach A fortgeschoben;

so

so wird der Schenkel I L, der schon gröstentheils ausserhalb dem Winkel K A B liegt, von demselben immer mehr weggerückt, er kann also auf diese Art nie weder innerhalb denselben, noch in den Schenkel A K fallen, also muß er, wenn die Spize nach A kommt, ganz ausserhalb K A B liegen, und so ists klar, daß der äussere Winkel L I B gröser ist, als der innere K A B. Daher ists auch nicht zu verwundern, daß Euklides diesen Saz aus der Gleichheit der Triangel herleiten konnte, denn lezteres gründet sich auf eben jenem Criterio, aus welchem man die Gröse der Winkel beurtheilet. Im eilften Grundsaze hingegen wird angenommen, daß der Winkel G I B gröser, als C A B ist, und hieraus soll ausgemittelt werden, daß der Schenkel I G fig. 9. gegen den Schenkel A C so liege, daß beide verlängert sich schneiden. Allein hiezu ist vorerwähntes Criterium offenbar unzureichend. Denn man stelle sich in A auf A B einen Winkel F A B vor, der dem gegebnen G I B gleich ist, und schiebe denselben auf die vorige Art in unveränderter Gröse auf A B bis I fort; so ists klar, daß der Schenkel A F, der anfänglich ausserhalb dem Winkel C A B lag, nach diesem Winkel hingeschoben wird, so daß ein Theil desselben zugleich innerhalb den Winkel C A B fällt, sobald die Spize des Winkels F A B

von A wegrücket. Hier entsteht also sogleich die Bedenklichkeit, ob nicht vielleicht der Schenkel A F, da er immer mehr in den Winkel C A B geschoben wird, endlich ganz und gar innerhalb denselben fallen könnte, und zwar, ehe noch die Spitze nach I kommt? Denn man darf nur annehmen, daß der Winkel Ada, unter welchem der fortgeschobene Schenkel A F den Schenkel A C anfänglich schneidet, immer mehr abnehme, je weiter er von A fortrückt, so daß z. E. ACa kleiner, als Ada wäre; so kann er endlich = o werden, alsdenn würde das Schneiden aufhören, und der gedachte Schenkel schon ganz innerhalb C A B liegen, wie dieses z. E. geschieht,
Fig. 5. wenn man den Schenkel I L, der den Schenkel A K in N schneidet, um den Punkt I nach der Seite K B herumdreht, wodurch zugleich der scheinbare Gedanke widerlegt wird, als ob das Schneiden deshalb niemals aufhören könnte, weil in dem Punkte, wo der Uebergang vom Schneiden zum Nicht-Schneiden geschähe, ein Theil des einen Schenkels ganz in einen Theil des andern fallen, und also eine sich widersprechende Vermischung zweyer verschiedner geraden Linien vorgehen müsse, denn beym gedachten Schenkel I L geschieht dieser Uebergang vom Schneiden zum Nicht-Schneiden offenbar, ohne daß deshalb eine solche Vermischung statt findet. Wollte man

also die obige Bedenklichkeit heben; so müste man beweisen können, daß der Winkel Ada, unter welchem sich die beiden Schenkel anfänglich schneiden, bey weiterm Fortstreben nach I hin, entweder immer gröſſer würde, oder sich wenigstens beständig gleich bliebe. Allein das erstere ist wider die bisherigen Säze von den Parallellinien; das zweite aber sezt schon die ganze Theorie der Parallellinien, die erst bewiesen werden soll, voraus. Da also der schwierige Euklideische Grundsaz die Bestimmung der Lage der beiden Schenkel gegen einander erfoedert, diese aber aus dem bisherigen Criterio von der Gröſſe der Winkel und der Lage ihrer Schenkel unmöglich geschehen kann; so ist es unstreitig, daß die Auflösung der Schwierigkeit nie zu erwarten war, wofern nicht erst vollständige und evidente Principien von der Lage der Linien gegen einander entdeckt würden. Fig. 9.

Allein jezt entstand die neue Frage, wie man zu diesen Principien kommen könnte? Der natürlichste und geradeste Weg hiezu konnte der zu seyn scheinen, daß man den Begrif der Lage zwoer in einerley Ebene zusammenlaufender oder nicht zusammenlaufender geraden Linien vorher zu analysiren, oder logisch zu zergliedern suchte. Ihn betrat vorzüglich Herr Hofrath Karsten in seinem bereits an-

geführten Versuch einer völlig berichtigten Theorie von den Parallellinien. Da beym Parallelseyn zweyer geraden Linien nicht ihre Größe, sondern bloß ihre Lage in Betrachtung kommt; so glaubte dieser gründliche und tief denkende Geometer, daß in der noch sehr dunkeln Idee von dem, was in einer Ebene ein Paar gerade nicht zusammenlaufende Linien sind, eine andere gleichfalls noch unentwickelte Idee versteckt liege, nämlich, was gerade Linien sind, die in einer Ebene einerley Lage haben. Nun sahe er zwar ein, daß der Begrif der Lage einer geraden Linie an sich eben so einfach, und daher auch eben so unerklärbar sey, als der Begrif der Größe einer geraden Linie. Allein da sich gleichwohl von der Identität der Größe gerader Linien gegen einander ein natürlich klares, allgemein faßliches Kennzeichen angeben läst; so glaubte er, daß sich ein solches auch von der Identität der Lage gerader Linien gegen einander müste angeben laßen. Daher suchte er daßelbe in sechs Grundsäzen zu bestimmen, unter denen der lezte also heißt: „Jede „gerade Linie in einer Ebene hat für sich ihre be„stimmte Lage. Wenn also zwo gerade Linien „gegen eine dritte, die mit ihnen in einerley Ebe„ne liegt, einerley Lage haben; so haben sie in „derselben Ebene auch für sich einerley Lage. Wenn

„aber

„aber zwo gerade Linien gegen eine dritte mit denselben in einerley Ebene liegende, nicht einerley Lage haben; so haben sie in derselben Ebene auch für sich nicht einerley Lage.„

Die Art, wie Herr Hofrath Karsten hier zu Werke geht, ist seinem bekannten Scharfsinne angemessen. Allein, so viel ich einsehe, wird auf diesem Wege auch der gröste Scharfsinn das gewünschte Ziel niemals erreichen. Denn was kann ich bey dem Begrif denken: zwo gerade Linien haben in der Ebene einerley Lage; Wenn ich sage: zwo gerade Linien haben einerley Gröſſe; so habe ich hievon einen anschauenden Begrif, denn ich kann sie substituiren, d. i. die eine mir völlig in der Stelle der andern vorstellen. Hier behalte ich also den Begrif von zwo verschiednen Linien, und die Identität ihrer Gröſſe besteht bloß darin, daß ich mir die eine ganz da vorstellen kann, wo die andere ist. Allein sage ich: zwo gerade Linien haben in der Ebene einerley Lage; so kann ich, wie schon der erste von den Grundsätzen des Herrn Karsten deutlich zeigt, hiemit keinen andern möglichen Begrif verknüpfen, als diesen: sie liegen beide an einerley Orte, oder welches einerley ist, sie fallen beide zusammen, und können daher bloß in Ansehung der Gröſſe verschieden seyn, so daß etwa die eine bloß ein Theil der

gudern wäre. Wenn also die Größe in beiden einerley ist; so sind zwo gerade Linien, die einerley Lage haben, nicht zwo verschiedne; sondern nur eine einzige. Bey den Parallellinien aber kommt die Größe in keine Betrachtung. Also hört hier alle Verschiedenheit gänzlich auf, und wenn ich in der eigentlichen Bedeutung sagen wollte: zwo Parallellinien haben in der Ebene einerley Lage; so könnte ich hierunter nichts anderes denken, als dieses: sie liegen ohne Ende fort ganz an einem und eben demselben Orte, oder sie fallen nach beiden Seiten ohne Ende verlängert zusammen, und sind also nicht zwo verschiedne Linien, sondern nur eine einzige. (eaedem numero). Hieraus ist zugleich klar, daß der Ausdruck: zwo gerade Linien C F, K L haben in der Ebene einerley Lage, auch nicht etwa
Fig. 12. die Bedeutung haben kann: ihre Lage in der Ebene sey von der Art, daß wenn die Durchschnittspunkte, A, I, in welchen eine dritte gerade Linie M R sie beide schneidet, zusammenfielen, beide Linien selbst zusammenfallen würden. Denn auf diese Art wüßte man zwar, daß beide Linien bey dieser veränderten Lage der einen einerley Lage haben würden, allein ihre wahre angenommene Lage in der Ebene bliebe völlig unentschieden. Ausserdem aber ist hier einleuchtend, daß, da man zur

Be-

Bestimmung der Lage der beyden Linien eine dritte sie schneidende zu Hülfe nehmen muß, auf diese aber nicht die Lage der beiden Linien in der Ebene für sich, sondern blos ihre Lage gegen die dritte Linie bestimmt wird, nämlich: weil beym Zusammenfallen der Durchschnittspunkte die beiden Linien selbst zusammen fallen; so zeigt dieses blos an, daß sie beide mit der dritten gleiche Winkel C A B, K I B machen, folglich gegen die dritte M B einerley Neigung d. i. einerley Lage haben, denn die Neigung ist nichts anders, als die Lage zweyer in einem Punkte zusammenstossender Linien gegen einander. Auf diese Weise drehen sich die Neigungen immerfort in einem Kreise herum, ohne daß man dadurch einen Schritt weiter kommt, und es ist also offenbar, daß man unter dem Ausdrucke: zwey verschiedene Linien haben in der Ebene einerley Lage, gar nichts bestimmtes oder deutliches denken kann. Wenn ich nicht ganz irre, so denkt man darunter auf eine kürzere und verstekte Art blos dieses, daß beide Linien nach einerley Gegend liegen. Nämlich jede gegebne gerade Linie bestimmt in der Ebene die Gegend, nach welcher sie liegt. Zieht man nun durch irgend einen Punkt derselben mehrere gerade Linien; so bestimmt eine jede von ihnen eine andere Gegend, also sich auf jedem Punkte einer geraden

Linie so viel verschiedne Gegenden in der Ebene möglich sind, als durch ihn gerade Linien möglich sind. Wenn der man nun dieses auf jeden Punkte in der gegebenen Linie an; so sind in Ansehung der letztern so viel verschiedne Gegenden in der Ebene möglich, so viel gerade Linien durch jeden Punkt der gegebnen Linie möglich sind, mithin kann eine gerade Linie, die in eben der Ebene liegt, und mit der gegebnen in keinem Punkte zusammenläuft, nicht nach einer Gegend liegen, die von der Gegend der gegebnen verschieden ist, also muß sie mit ihr nach einerley Gegend liegen. So stellt man sich also zwo Parallellinien als solche vor, die in der Ebene nach einerley Gegend liegen. Dieses aber heißt im eigentlichen Verstande nichts anders als solche Linien, die weder für sich, noch mit irgend einer von allen geraden Linien, die eine von ihnen schneidet, einerley Lage haben.

Auf diese Art müßten also die beiden Sätze des sechsten Euklidischen Grundsatzes bestimmter ausgedrückt also heißen; wenn zwo gerade Linien gegen eine dritte, die mit ihnen in einerley Ebene liegt, einerley Neigung haben; so liegen sie beide nach einerley Gegend. Wenn aber in der Ebene zwo gerade Linien gegen eine dritte nicht einerley Neigung haben; so liegen sie nicht nach einerley Gegend. Drückt man aber diesen Grundsatz so aus:

so ist offenbar, daß er mit dem Axiom: wenn zwo Größen einer dritten gleich sind; so sind sie einander selbst gleich, nicht die mindeste Aehnlichkeit hat, und daß er also nicht als Grundsatz gelten kann, sondern erst Beweis erfordert. Denn da nach der angezeigten Analysis der Begriff des Liegen nach einerley Gegend nichts anders heißt, als das Parallelseyn, ohne das Nichtzusammenlaufen; so ist der erstere von den beiden Sätzen mit dem ersten Hauptproblem von den Parallellinien, und der zweite mit dem eilften Grundsatz des Euklides völlig einerley. Es ist also offenbar, daß man auch auf diese Weise durch das bloße Analysiren des Begriffs der Lage zwoer Parallellinien keinen Schritt weiter komme.

Daß es aber überhaupt schlechterdings unmöglich sey, die Lehre von den Parallellinien durch bloße Analysirung des Begriffs ihrer Lage festzustellen, läßt sich, wie mich dünkt, ganz zuverlässig auf folgende Art überführen. Die Analysis eines Begriffs besteht darin, daß man auf eine logische Art nach dem Satze des Widerspruchs, alles dasjenige deutlich entwickelt, und auseinander setzt, was man verstekt unter dem Begriffe denkt. Da also die Analysis den Begriff vom Gegenstande bloß in seine Bestandtheile auflöset; so kann sie zu den Prädicaten, die der Begriff vom Gegenstande in sich

enthält, kein neues hinzuzufügen, und daher meine Erkenntniß vom Gegenstande auf keine Weise erweitern kann, sondern der ganze Vortheil, den ich durch die Analysirung des Begriffs erhalten kann, lediglich darin, daß ich dem Inhalte desselben, den ich anfänglich nur verworren und dunkel dachte, eine logische Deutlichkeit verschaffe. Denn hat ich bey der Analysirung des Begriffs alles dem Begriffe nicht herausgehen kann; so ist es unmöglich, daß sich dadurch auf etwas kommen kann, was nicht bereits wirklich in dem Begriffe auf eine versteckte Art liegt. Nun enthält der Begriff von zwo geraden Linien, die entweder zusammenlaufen oder nie zusammenlaufen, an sich nichts weiter, als die gegenseitige Lage, welche sie gegen einander haben. Die Theorie jener zusammenlaufenden oder nicht zusammenlaufenden Linien dagegen sagt nach derjenigen Lage, welche sie gegen eine dritte sie schneidende Linie haben, oder nach dem Winkel, den sie mit dieser machen. Dieß ist offenbar ein Prädicat von ganz anderer Art, das im Begriffe des Zusammenlaufens zweyer Linien nicht liegt. Also ist es schlechterdings unmöglich, daß durch bloße Analysirung des Begriffs vom Zusammenlaufen oder Nichtzusammenlaufen zweyer geraden Linien jenes neue Prädicat bestimmt, und also jene verlangte Theorie bewiesen

wiesen werden könnte. Gesezt aber selbst, daß dieses möglich wäre; so würde eine solche Beweisart durch bloße logische Analysirung der Begriffe doch bloß discursiv seyn, mithin würde ihr die Anschauung und also auch die Evidenz fehlen, die das Eigenthümliche eines geometrischen Beweises ausmache, und da auf diese Art bloß aus Begriffen geschlossen würde; so würde ein solcher Beweis höchstens für einen philosophischen Beweis, keinesweges aber für einen geometrischen gelten, der nicht aus Begriffen schließen, sondern, wie oben gezeigt worden, die Begriffe construiren d. h. sie in concreto in einer Anschauung a priori darstellen muß.

In der Lehre von den Parallellinien kommt unter andern, wie bekannt, auch folgender Saz vor: wenn zwo gerade Linien mit einer dritten parallel sind, so sind sie unter einander selbst parallel. In diesem Saze kommt eben der Begrif parallel, der im Subject vorkommt, auch im Prädicat vor. Es scheint daher, daß das, was ich mir eben gesagt habe, bey diesem Saze hinwegfalle, und daß also dieser Saz sich vielleicht durch die weitere Analysirung des Begrifs vom Parallelschneiden herleiten laßen. Diese Vermuthung scheint sich noch dadurch zu vermehren, weil dieser Saz viel Analogisches mit den beiden Grundsäzen hat, wenn

zwo

gune Größen einer dritten gleich, oder ähnlich sind, so sind sie einander selbst gleich, oder ähnlich. Wäre aber dieser Satz erst festgestellt: so wäre durch ihn die ganze Theorie der Parallellinien ohne Mühe aufs vollkommenste ins Reine gebracht. Es muß daher dem Liebhaber der Geometrie nicht wenig angenehm seyn, daß auch dieser Weg noch zu allerletzt von einem Manne betreten worden, von welchem man die glückliche Erreichung des Ziels sicher erwarten konnte, wofern dasselbe auf diesem Wege sich möglich erreichen ließe. Ihn betrat Herr Professor Hindenburg in seinem neuen System der Parallellinien, welches er im zweiten Stück des Leipziger Magazins S. 145 — 168, 1781 bekannt machte, und darüber er im dritten Stücke S. 342 — 371 sehr lehrreiche Anmerkungen nachfolgen ließ. Er sahe bald, daß der vorerwähnte Satz zween verschiedene Fälle enthält, indem die Vergleichsparallele d. i. die dritte Linie, mit welcher die beiden andern parallel angenommen werden, entweder zwischen ihnen, oder außerhalb denselben liegen kann. Den ersten Fall beweiset er S. 165 ganz strenge auf folgende Art: Wenn A B, E F mit C D parallel sind; so sind sie selbst parallel. Denn gesetzt A B, E F stießen nach einer Seite z. E. nach B F zusammen; so müßte ihr Durchschnittspunkt entweder über C D, oder

Fig. 21.

oder unter C D, oder in C D, selbst liegen, folglich müssten im ersten Fall E F, C D, im zweiten A B, C D, und im dritten so wohl A B, C D, als E F, C D einander schneiden, also wären in keinem von allen drey Fällen beide Linien A B, E F mit C D parallel. Da nun dieses wider die Hypothesis ist; so können A B, E F nach keiner Seite zusammenstossen, also sind sie parallel.

Der zweite Fall enthält folgenden Satz: Wenn A B, C D mit E F parallel sind; so sind sie selbst parallel. Diesen Satz suche er also zu beweisen: Gesetzt zwo gerade Linien (wie hier A B, C D, und so auch jede andere) wären auf den Fall, daß ihre Vergleichsparallele (wie hier E F) nicht zwischen, sondern ausser ihnen läge, nicht parallel, so ziehe man durch einen willkührlichen Punkt I in A B eine Parallele G H mit C D, die folglich von A B verschieden seyn wird. Weil also G H, E F mit C D parallel sind; so ist auch G H mit E F parallel (nach dem ersten Falle). Nun aber ist auch C D mit E F parallel (Voraussf.). Also wäre G H mit C D nicht parallel (nach der Annahme im Anfange des Beweises, weil E F nicht zwischen, sondern ausserhalb G H und C D liegt). Da nun dieses dem vorigen widerspricht; so ist A B mit C D parallel.

Man

Man wird leicht einsehen, daß diese Beweisart für den zweiten Fall ganz unzulänglich ist, und so, wie sie da steht, unmöglich jemanden überzeugen kann. Ich zeigte daher in der Beilage zum 28sten Stücke der Königsbergischen gelehrten und politischen Zeitungen vom Jahr 1782. theils, daß die Annahme im Anfange des Beweises unrichtig wäre, und nicht heißen müste: gesetzt, zwo solche Linien, wie A B, C D, und so auch jede andere, die mit einer beiden außer ihnen liegenden E F parallel wären, könnten nirgends parallel seyn, sondern: gesetzt, es wäre möglich, daß zwo solche Linien nicht parallel wären, weil das Gegentheil des nothwendigen Seyns die Möglichkeit des Nichtseyns ist, theils, daß wenn man die Annahme des Verfassers beybehielte, alsdann die letzte Schlußfolge nicht diese wäre: A B, C D sind nothwendig parallel, sondern bloß: es ist möglich, daß A B, C D parallel seyn können. Ich fand auch bald nachher, daß der Recensent in den Göttingischen gelehrten Anzeigen durch diese Beweisart des Verfassers eben so wenig befriedigt worden. Die versprochnen Anmerkungen, die im dritten Stück des Magazins folgten, zeigten endlich den Grund, aus welchem der Verfasser sich zu dieser ganz neuen Beweisart berechtigt hielt, und wider mein Erwarten sahe ich

in der Nachrichtung, daß meine Recension ihm noch eben vor dem Abdrucke des lezten Blatts zu Gesichte gekommen war. Die freundschaftliche Art, mit welcher er seinen ihm unbekannten Gegner behandelt, hat mir in ihm einen Mann gezeigt, der von Seiten seiner edlen Denkungsart nicht weniger Hochachtungswerth ist, als von Seiten seiner bekannten gründlichen Gelehrsamkeit, und bloß Mangel der Zeit ist es, die mich bisher noch des Vergnügens beraubt hat, mit ihm in die nähere Verbindung zu treten, die er mir so liebreich angetragen. Allein einem Gelehrten, der so denkt, trage ich auch um so weniger Bedenken, meine weitere Gedanken über die Rechtfertigung seiner neuen Beweisart freimüthig anzuzeigen. Er gesteht es selbst S. 348, daß seine angezeigte Beweisart für den zweiten Fall etwas Eignes hat, und ein ähnliches Beispiel in der Geometrie nirgends vorkommt. Ja um dieses desto anschaulicher zu zeigen, hat er S. 357—360 die verschiednen Arten aller bisher bekannten indirecten Beweise vortreflich zergliedert. Der Grund aber, auf welchen er die Richtigkeit so wohl der ungewöhnlichen Annahme als Schlußfolge in seinem neuen Beweise stüzzet, ist dieser: weil hier ein Fall vorkomme, wo von zween nicht contradictorie, sondern contrarie entgegengesezten Säzen einer

noth-

nothwendig wahr, und der andere falsch seyn müsse. Nämlich, wenn man ein Paar gerade Linien annimmt, die einer und eben derselben dritten ausserhalb ihnen liegenden geraden Linie parallel sind; so ist entweder jedes Paar solcher Linien parallel, oder jedes ist nichtparallel, oder einige Paar sind parallel, einige nichtparallel. Nun aber meint der Verfasser S. 250. 368. „der dritte Fall könne nicht „statt haben, weil jedes Paar solcher Linien gegen „eine und eben dieselbe äussere Linie auf einerley „ganz einfache Art bestimmt werde, und daher auch „der Erfolg aus dieser Bestimmung (das Parallelseyn oder das entgegengesetzte Nichtparallelseyn) bey jedem solchen Paar Linien, einer und „eben derselbe seyn müsse. Denn in der Sprache „der Logik hat die Bejahung oder Verneinung des „Prädicats ihren zureichenden Grund im Subjecte „und dessen Bestimmung, also könnten einerley Subjecte (ein Paar gerade Linien) auf einerley Art „determiniert (gegen eine und dieselbe Linie parallel) „nicht entgegengesetzte Prädicate (parallel, nichtparallel) haben. Da also der dritte Fall nicht statt „findet; so bleiben bloß die beiden ersten übrig, „nämlich entweder müsse jedes Paar gerade „Linien, die gegen eine dritte äussere parallel „sind, parallel seyn, oder jedes solches Paar „müsse

müſſe zuſammenlaufend d. i. nichtparallel ſeyn.„

Durch dieſe Aeußerung zeigt der V. den Geſichtspunkt, aus welchem ſein mehr erwähnter Beweis beurtheilt werden ſoll, ſo an, wie man ihn aus dem Beweiſe an ſich unmöglich errathen konnte. Wenn daher der diſjunctive Saz, den er hier behauptet, aus ſeinen Prämiſſen mit apodiktiſcher Gewißheit folgte, nämlich daß entweder jedes Paar Linien, das gegen eine dritte parallel iſt, parallel, oder jedes Paar ſolcher Linien zuſammenlaufend ſeyn muß, d. h. entweder jedes Paar, oder kein Paar ſolcher Linien parallel ſey; ſo hätte es mit ſeinem Beweiſe des Hauptſazes vollkommene Richtigkeit. Aber alsdenn gehörte jener diſjunctive Saz nicht unter die Anmerkungen; ſondern alsdenn müßte er im Syſtem der Parallellinien ſelbſt ſtehen, und vor dem zu erweiſenden Saz: daß zwo Linien, die mit einer dritten parallel ſind, ſelbſt parallel ſeyn, als ein ganz nothwendiger und unentbehrlicher geometriſcher Lehrſaz vorausgeſchikt werden, weil ohne dieſen der Beweis von jenem gar nicht ſtatt findet. Hier aber würde dieſer diſjunctive Saz gegen die übrigen Säze der Euklidiſchen Geometrie eine ſchlechte Figur machen. Denn da der V. den Beweis ſelbſten nicht anſchaulich durch Conſtruction

der Begriffe führt, sondern darin bloß nach einer logischen Regel aus Begriffen schließt, und ihn aus dem Saz des zureichenden Grundes herleitet; so würde seine Schlußart, wenn sie gleich noch so richtig wäre, doch immer sehr weit unter der Würde und Evidenz einer geometrischen Demonstration zurückbleiben, und nichts weiter als ein bloß discursiver philosophischer Beweis heißen können, dergleichen man in der Geometrie auf keine Weise duldet. Wäre man mit solchen philosophischen Beweisen in der Geometrie zufrieden; so hätte es mit der Theorie der Parallellinien keine Schwierigkeit, denn auf diese Art wäre die Kästnerische Erläuterung des berüchtigten Euklidischen Grundsatzes nicht bloß Erläuterung, sondern ein vollkommener Beweis, indem sie eine ganz ungezwungene und unwiderlegbare Folgerung aus dem Saz des zureichenden Grundes ist.

Allein, meines Erachtens, ist wider den logischen Grund selbst, den der V. für den angezeigten disjunctiven Saz anführet, noch manches zu erinnern. Denn die beiden Sätze der Logik, auf welche er sich beruft, können nicht eher mit Sicherheit angewendet werden, als bis man erst deutlich bestimmt, was unter dem Begrif: einerley Subjecte auf einerley Art determinirt zu verstehen sey. Denn die Bestimmung

stimmung des Subjects in einem Satze ist nichts anders, als die Anzeige der Merkmale, wodurch es von andern Dingen unterschieden werden soll. Diese Merkmale aber, die man vom Subjecte angiebt, können von zweierley Art seyn, nämlich: entweder werden durch sie zugleich alle übrige Bestimmungen des Subjects gegeben, so daß lezteres durch sie durchgängig und vollständig bestimmt wird (z. E. wenn ich vom Dreyek die Größe zweer Seiten und des von ihnen eingeschloßenen Winkels angebe), oder die angegebnen Merkmale sind von der Art, daß durch sie das Uebrige im Subject nicht durchgängig bestimmt wird (z. E. wenn ich von einem Dreyek die Größe zweer Seiten und eines nicht von ihnen eingeschloßnen, sondern der einen gegebnen Seite gegenüberstehenden Winkels angebe). Soll daher der zweite logische Satz: einerley Subjecte auf einerley Art determinirt können nicht entgegengesetzte Prädicate haben, allgemein richtig seyn; so kann derselbe keinen andern, als diesen Sinn haben: einerley Subjecte, von denen man einerley Merkmale angiebt, welche von der Art sind, daß durch sie alles Uebrige in jedem Subjecte völlig bestimmt wird, können nicht entgegengesetzte Prädicate haben (z. E. wenn ich Dreyeke (einerley Subjecte) annehme, in denen jedem zwo Seiten nebst dem eingeschloß-

nen Winkel einerley Gröſſe haben (drey Merkmale, die nicht nur in allen Dreyecken einerley, sondern auch von der Art sind, daß durch sie alles Uebrige in jedem Dreyecke völlig bestimmt wird): so sind entweder alle solche Dreyecke rechtwinklichte, oder alle solche Dreyecke sind nicht rechtwinklichte d. i. schiefwinklichte). Wollte man dagegen den logischen Saz des Verfaſſers auch da anwenden, wenn die Merkmale, die man in einerley Subjecten, als einerley angiebt, von der Art sind, daß durch sie das Uebrige in jedem dieſer Subjecte nicht völlig bestimmt wird; ſo würde er offenbar nicht allgemein richtig seyn, und daher auf Irrthümer führen. So würde z. E. der Schluß offenbar falſch seyn: Dreyecke, in denen jeden zwo Seiten und ein der einen Seite gegenüber ſtehender Winkel einerley Gröſſe haben, sind entweder alle rechtwinklichte, oder alle ſchiefwinklichte, obgleich von allen dieſen Dreyecken einerley Merkmale angegeben werden, denn hier sind die drey angegebnen Merkmale nicht von der Art, daß durch ſie alles Uebrige in einem ſolchen Dreyecke bestimmt wird. Nun wende man den auf dieſe Art deutlich bestimmten logiſchen Saz auf den disjunctiven Saz des Verfaſſers an. Hier wird von einerley Subjecten (von jedem Paar gerader Linien) einerley Merkmal angege-

gegeben (daß jedes Paar solcher Linien gegen eine und eben dieselbe dritte parallel sey). Soll also hieraus gefolgert werden, daß aus dieser Bestimmung immerfort einerley Prädicate fließen müssen, nämlich daß entweder jedes Paar solcher Linien parallel, oder jedes Paar solcher Linien nicht parallel sey; so muß man voraussetzen können, daß durch das angegebne Merkmal jedes Paar solcher Linien völlig bestimmt werde. Nun aber kommt beym Parallelseyn nicht die Größe, sondern bloß die Lage der Linien in Betrachtung. Also muß man voraussetzen können, daß durch das Merkmal, daß ein Paar Linien gegen eine gegebne dritte parallel sey, ihre Lage völlig bestimmt werde. Aber nun frage ich: wie ist man zu dieser Voraussetzung befugt? Wir wollen setzen, C D sey mit E F parallel. Fig. 21. Nun ziehe man ferner durch den Punkt I eine gerade Linie A B, die auch mit E F parallel ist. Soll also der Satz des Beweisers gewiß seyn; so muß man voraussetzen können, daß die Lage der durch I mit E F gezogenen Parallele A B völlig bestimmt sey, d. h. daß durch den Punkt I mit E F nicht mehr als eine einzige Parallele möglich ist, mithin jede gerade Linie G H, die von zwo Parallelen A B, E F die eine A B in I schneidet, auch mit der andern E F zusammenlaufen und sie schneiden müßte. Allein

einen von diesen Sätzen voraussezzen, heißt eben so viel, als den eilften Grundsaz des Euklides selbst voraussezzen. Und so ist offenbar, daß der angezeigte logische Saz den disjunctiven Saz des Verfassers und mithin auch die Gültigkeit seiner neuen Beweisform für den zweiten Fall seines Hauptsazes nicht anders rechtfertigen kann, als mit Voraussezzung eben deßen, was erst bewiesen werden soll. Denn wollte der Verfaßer etwa sagen, daß der Saz: „wenn „A B mit E F parallel ist; so kann keine andere Linie „G H, die durch I in A B geht, mit E F parallel seyn,„ eben durch seinen neuen indirecten Beweis dargethan würde; so wäre dies eine wahre petitio principii, indem die Form seines Beweises schlechterdings unter keiner andern Bedingung für gültig angenommen werden kann, als wenn dieser Saz, von welchem die Richtigkeit seines disjunctiven Sazes abhängt, schon als wahr vorausgesezt wird. Und in der That, wäre der Geometer zur Annahme des disjunctiven Sazes berechtiget, daß entweder jedes Paar gerader Linien, die gegen eine dritte parallel sind, parallel, oder jedes Paar solcher Linien nichtparallel seyn müße; so wäre die neue indirecte Beweisform des Verfaßers ganz entbehrlich, und die ganze Schwierigkeit in der Lehre von den Parallellinien wäre alsdenn schon längst gehoben. Ich wür-

würde alsdenn seinen Hauptsaz ohne alle Mühe nach einer von den ganz gewöhnlichen directen Beweisformen also herleiten: Entweder ist jedes Paar gerader Linien, die mit einer dritten außerhalb ihnen liegenden EF parallel sind, parallel, oder jedes Paar solcher Linien ist nichtparallel. Ein drittes giebt es nicht. Wenn daher nur ein einziges Paar solcher Linien parallel ist; so fällt der zweite Saz: jedes Paar ist nichtparallel, schon weg, also ist alsdenn der erste Saz wahr, daß jedes Paar solcher Linien parallel ist. Nun ziehe man durch E F eine willkührliche gerade Linie K O, und richte in zween willkührlichen Punkten derselben M, N die Winkel O M D, O N B auf, so daß jeder dem Winkel O L F gleich werde; so ist sowohl C D, als A B mit E F parallel, und zugleich auch C D mit A B parallel, mithin ist hier ein Paar solcher Linien A B, C D, die mit der dritten äußern E F parallel sind, wirklich parallel, also ist (vermöge des vorher bewiesenen) jedes Paar gerader Linien, die gegen eine dritte äußere E F parallel sind, selbst parallel. Fig. 22.

So ist es demnach wohl ungezweifelt gewiß, daß auch auf dem Wege, den Herr Professor Hindenburg versucht hat, für die Theorie der Parallellinien nie etwas zu erwarten steht, indem jeder gestehen wird, daß er seinen Gegenstand von allen

Seiten durchgedacht, und ihn mit durchdringendem Scharfsinn so weit als möglich verfolget hat, wovon auch die neue sinnliche Erläuterungen, die er in seinen Anmerkungen beigebracht, deutlich zeigen. Eben dieses hat mich veranlaßt, seinem System eine so ausführliche Prüfung zu widmen.

Es wird hoffentlich nichts weiter nöthig seyn, um einzusehen, daß die Schwierigkeit in der Lehre von den Parallellinien weder durch bloße Analysirung des Begriffs ihrer Lage, noch auch durch irgend einen logischen Beweis, daß das Parallelseyn zweer Linien ihre Lage gegen einander völlig bestimme, jemals gehoben werden könne. Und hieraus ist vollkommen begreiflich, woher alle angestellte Versuche nothwendig ohne Erfolg seyn mußten. Sollte daher eine vollkommene Theorie der Lage festgesetzt werden; so mußte dieses auf einem ganz andern Wege geschehen, es mußte nämlich erst zu dem Begrif der Lage der Linien, noch ein neuer mit jenem allemal verknüpfter Begrif aufgesucht, und hiedurch ein allgemeines Principium ausgemittelt werden, nach welchem die Größe zweener verschiednen Winkel und aus dieser umgekehrt die Lage ihrer Schenkel gegen einander unmittelbar bestimmt werden könnte, ohne daß man hiezu erst nöthig hätte, den einen auf den andern zu legen. Und dieß allgemeine Principium

ist

ist eben dasjenige, deßen Entdeckung mir glücklich gelungen ist, nämlich die Vergleichung der Größe der ebenen Flächen, die zwischen den Schenkeln des Winkels ohne Ende fort enthalten sind. Es ist in der That zu verwundern, daß man hierauf nicht früher gekommen, sondern sich in der Lehre von den ebenen Winkeln bloß mit dem so unbestimmten und dunkeln Begrif der Lage oder Neigung der Schenkel beholfen hat. Mir ist wenigstens kein Geometer bekannt, der jemals auf die unbegrenzte Fläche zwischen den Schenkeln selbst Rücksicht genommen, und in allen 28 Versuchen, welche Herr Professor Klügel in der angeführten Disputation recensirt hat, finde ich keinen einzigen, der auch nur auf die entfernteste Weise einige Spur hievon zeigte. Es scheint also fast, daß man der Betrachtung der Winkelflächen mit Fleiß ausgewichen ist, und sich auf diese Art, ohne es zu wißen, den Weg zur Theorie der Parallellinien selbst verschloßen hat. Ich weiß von diesem Verfahren zur Zeit keinen andern Grund anzugeben, als diesen, weil die Winkelflächen nach der einen Seite hin unbegrenzt sind, und ohne Ende fortgehen, und man daher vielleicht besorgt hat, daß durch die Betrachtung solcher unendlichen Flächen die geometrische Strenge und Evidenz leiden würde. Vielleicht wurde man auch von

der Betrachtung der Winkelflächen noch um so mehr dadurch abgezogen, weil, wenn man bey einen geradlinigten Winkeln bloß auf die Neigung der Schenkel gegen einander sieht, die Größe der Schenkel in keine Betrachtung kommt, und man sich daher schon mit dem Euklides solche dazu gewöhnt, sich diese Neigung bloß nahe am Scheitel des Winkels vorzustellen. Allein daß dieses letztere ein offenbarer Fehler ist, durch welchen man sich die Beurtheilung aller derjenigen Winkel, die nicht geradlinigt sind, ganz unmöglich gemacht hat, wird meine künftige allgemeine Theorie der Lage zeigen, und daß die Furcht vor der Unendlichkeit der Winkelflächen nichtig ist, zeigt schon meine gegenwärtige Abhandlung. Denn in meiner ganzen ersten Beweisart der Theorie der Parallellinien, welche eben diejenige ist, die in einem Euklideischen System der Geometrie Vorzugsweise vor den beiden übrigen gewählt werden muß, kommt die Unendlichkeit der Winkelflächen in gar keine Betrachtung, sondern hier wird die Größe derselben eben so, wie bey jeder endlichen Fläche beurtheilet. In der zweiten Beweisart kommt zwar schon bey der Vergleichung der Winkelflächen der Begrif des unendlich Großen und unendlich Kleinen vor, allein die Strenge und Evidenz des Beweise leidet hierdurch so wenig, daß vielmehr der

Begrif des Unendlichen, der doch nachher in der höhern Mathematik ganz unentbehrlich ist, eben dadurch sogleich dem Anfänger ganz anschaulich gemacht, und die Vorstellung, wie eine wirkliche bestimmte Größe gegen eine andere ein wahres relatives Nichts seyn könne, so daß letztere weder durch die Addition noch Subtraction der erstern verändert wird, hier ganz evident und ganz apodiktisch im vollkommensten Lichte dargestellt wird. Dem Anfänger den Begrif des Unendlichen in der ebenen Geometrie entziehen, heißt offenbar, ihn über die Natur der ebenen Fläche, in welcher er sich doch alle seine Linien und Figuren vorstellen soll, mit Fleiß in Unwissenheit lassen, und eben daraus entstehen nachher alle die unnöthigen Schwierigkeiten, in die er sich nicht zu finden weiß, wenn er zur Analysis des Unendlichen fortschreitet. In meiner dritten Beweisart kommt die Unendlichkeit der Winkelflächen zwar ebenfalls in Betrachtung, aber so, daß hier der Begrif des unendlich Großen und Kleinen nicht nur noch in einem weit höhern Grade anschaulich wird, als in der zweyten Beweisart; sondern hier lernt der Anfänger zugleich mit der größten Evidenz einsehen, wie eine Größe, die gegen eine andere unendlich klein, oder ein wahres Nichts ist, dennoch gegen eine dritte unendlich groß seyn könne,

und

und wie es daher unzählich viele Grade des unendlich Großen und Kleinen geben könne. So wird der Lehrling schon sofort im Anfange der Geometrie ohne alle Weitschweifigkeit auf die leichteste und anschaulichste Weise zur Analysis des Unendlichen vorbereitet, und die Vollkommenheit der Geometrie leidet also gegentheils offenbar, wenn man in ihr die wichtigen Kenntniße, die die Betrachtung der Winkelflächen darbietet, wegläßt.

Ohnedem ist nichts natürlicher, als daß die Neigung, welche die Schenkel eines ebenen geradlinigten Winkels gegen einander haben, uns zugleich zur Nachfrage nach dem Theil der unbegrenzten Ebene leitet, welcher zwischen denselben liegt. Wenn man nämlich verschiedene Winkel betrachtet, die alle einerley Scheitel A und einen gemeinschaftlichen Schenkel A B haben; so ist es anschaulich, daß mit der Größe des Winkels oder der Neigung des zweiten Schenkels auch beständig die Größe der unbegrenzten Ebene wächst, die zwischen beiden Schenkeln liegt, und daß also hier der größere Winkel auch allemal eine größere Winkelfläche hat, und umgekehrt eine größere Winkelfläche auch allemal einen größern Winkel giebt, mithin auch gleiche Winkel gleiche Flächen haben, und gleiche Winkelflächen auch gleiche Winkel geben müßen. Allein sind dieses Grundsätze,

wel-

welche die unmittelbare Anschauung lehret; so ist es nicht weniger anschaulich, daß sie von allen möglichen ebenen geradlinigten Winkeln gelten müssen, ihre Scheitel und Schenkel mögen liegen, wo man wolle. Denn alle Geometer nehmen es als ein Axiom an, auf welchem die ganze Euklidische Geometrie beruhe, daß alle gleiche Winkel einander decken d. h. daß der eine derjenigen auf den andern gelegt werden kann, daß der Scheitel des einen auf den Scheitel des andern, die Schenkel des einen ohne Ende fort auf die Schenkel des andern fallen, und die ebene Fläche, die zwischen den Schenkeln des einen als ihren Grenzen ohne Ende fort enthalten ist, auf die ebene Fläche fällt, die zwischen den Schenkeln des andern, als ihren Grenzen, ohne Ende fort enthalten ist. Das Decken der Winkel ist also nichts anders, als das Decken der Winkelflächen, und das Axiom, daß gleiche Winkel einander decken, sagt also nichts anders, als daß sich die Flächen gleicher Winkel, mithin auch die Schenkel, als die Grenzen jener Flächen einander decken. Nun aber ist es ein eben so allgemein bekanntes Axiom der Geometrie, daß Größen, die einander decken, gleich und ähnlich sind. Also ist es offenbar, daß die Flächen aller gleichen Winkel gleich und ähnlich sind, ihre Scheitel und Schenkel mögen liegen, wo man wolle. Den

ein-

einzige scheinbare Einwurf, den man hierüber machen könnte, wäre der, daß, wenn man zween gleiche Winkel H K B, F L B nähme, die verschiedne Scheitel K, L hätten, und wo ein Schenkel K B des einen mit einem Schenkel L B des andern in einer geraden Linie lägen, es hier wider den Augenschein zu streiten schiene, daß die Fläche des Winkels H K B der Fläche des Winkels F L B gleich seyn sollte. Allein wer diesen Einwurf im Ernst machen wollte, der müßte entweder leugnen, daß man beide Winkel so auf einander legen könnte, daß sie sich decken, oder alsdenn widerspräche er entweder dem Axiom, daß alle gleiche Winkel einander decken, oder seiner eignen Annahme, daß es gleiche Winkel wären; oder er müßte annehmen, daß die Fläche des Winkels H K B sich mittlerweile, da man ihn auf den Winkel F L B legt, vergrößert hätte, welches offenbar ungereimt ist. Anstatt also daß dieser Fall dem Grundsatze, daß alle gleiche Winkel gleiche und ähnliche Flächen haben, entgegen wäre; so leitet er uns vielmehr natürlich auf den ganz erklärten Satz, daß hier die unbegrenzte Ebene F L K H gegen die Winkelfläche H K B eine wahre Null, oder unendlich klein sey, wie in der Anmerkung zum siebenten Lehrsatz meiner zweyten Beweisart ausführlicher gezeigt wird. Allein ist es apodiktisch gewiß, daß alle

Fig. 67.

gleis

gleiche Winkel auch gleiche Flächen haben; so folgt hieraus unmittelbar, nicht nur, daß überhaupt ein größerer Winkel auch allemal eine größere Fläche hat, als ein kleinerer, sondern auch daß jeder vielfache Winkel eine gleich vielfache Fläche haben muß, und daher die Winkel sich allemal wie ihre Flächen verhalten, mithin der Winkel das Maaß seiner Fläche, und die Winkelfläche das Maaß des Winkels ist. Dieses ist schon an sich selbst so augenscheinlich, daß man nicht einmal diese weitläuftige Deduction erst nöthig hat, sondern billig ohne alle Umschweife sogleich nach der Definition der Winkel und ihrer Flächen, die Größe der Winkel durch folgende Definition bestimmen sollte: Gleiche Winkel heißen solche, deren Flächen gleich sind, ungleiche Winkel, deren Flächen ungleich sind. Von zween ungleichen Winkeln heißt derjenige der größere, der eine größere Fläche hat, der kleinere, der eine kleinere Fläche hat. So ginge man nachher auf einem ganz ebenen Wege fort, und hätte zugleich den Vortheil, mit jeder Betrachtung der Winkel und Figuren in der ganzen Geometrie hindurch weit hellere und fruchtbarere Vorstellungen zu verknüpfen, als es bisher möglich gewesen.

Da auf diese Weise mit dem unbestimmten Begriffe der Lage und Neigung der geraden Linien gegen einander der ganz verschiedne Begrif der ebenen

den Fläche, welche zwischen ihnen liegt, auf eine anschauende Weise verknüpft wird, und zwar so, daß der erstere durch den letztern völlig bestimmt wird; so ist leicht einzusehen, daß auf diesem Wege die vollständige Theorie der Lage gerader Linien gegen einander, und also auch die Theorie der Parallelen nothwendig entdecket seyn muß. Denn man Fig. 23. nehme in der Ebene ein Paar gerade Linien F C, D G an, wo man wolle; so kann man nunmehr ihre Lage gegen einander, ob und nach welcher Seite sie verlängert zusammenstoßen, folgendermaßen ganz leicht bestimmen. Man ziehe von einer zur andern eine willkührliche gerade Linie A I, verlängere sie nach M und B, und richte auf den Schenkel I B in I einen Winkel auf, der dem Winkel C A B gleich ist; so fällt der zweite Schenkel entweder innerhalb den Winkel G I B in I K, oder außerhalb denselben in I L, oder in den Schenkel I G selbst. Fällt er in I K; so ist klar, daß G I B > C A B, folglich auch die Fläche des Winkels G I B größer, als die Fläche des Winkels C A B ist, folglich der Schenkel I G aus dem Winkel C A B herausgehet, mithin den Schenkel A C schneiden muß, also F C, D G nach der Seite C, G zusammenstoßen müssen. Fällt erwähnter Schenkel in I L; so ist C A B > G I B, folglich F A M > D I M, also müssen

in

in dieſem Falle F C, D G nach der andern Seite F, D zuſammenſtoßen. Fällt er endlich in den Schenkel I G ſelbſt; ſo iſt G I B = C A B, folglich auch F A M = D I M. Alſo ſtoßen in dieſem Fall F C, D G weder nach der Seite C, G, noch nach der Seite F, D zuſammen, und ſind daher parallel.

So läſt ſich demnach die Beſtimmung der Lage zwoer geraden Linien gleichſam mit einem Blick überſehen, und ſo iſt wohl kein Zweifel, daß die ganze Schwierigkeit hierin bloß daher entſtanden und ſo lange fortgewähret hat, weil man die Neigung der Schenkel eines Winkels bloß aus ihr ſelbſt herleiten wollte, da doch dieſelbe lediglich durch die Ebene beſtimmt wird, die zwiſchen ihnen liegt.

Theorie der Parallelen.

Erster Abschnitt.

Theorie der Parallellinien.

Erste Beweisart.

1. Erklärung.

Fig. 1. Gerade Linien A B, C D heißen gleichlaufend, oder parallel, wenn sie in einer Ebene dergestalt liegen, daß sie nach keiner Seite zusammenstoßen, wenn sie gleich ohne Ende verlängert werden.

Liegen dagegen zwo gerade Linien F C, D G in einer Ebene so, daß sie nach der einen Seite C, G hin verlängert zusammenstoßen; so heißen sie nach
Fig. 2. dieser Seite C, G hin zusammengehend, oder convergent, und nach der entgegengesezten Seite F, D hin auseinanderfahrend, oder divergent.

2. Erklärung.

Wenn von zwo geraden Linien A G, A B, welche in einem Punkte A zusammenstoßen, die eine die Verlänge-

längerung der andern ist; so heißen sie einander gerade entgegengesezt. Wenn dagegen zwo gerade Linien A C, A B, die nicht einander gerade entgegengesezt sind, im Punkte A zusammenstoßen; so heißen sie gegen einander geneigt, oder sie haben gegen einander eine Neigung. Fig. 3.

3. Erklärung.

Die Neigung, welche zwo gerade Linien A C, A B in einer Ebene gegen einander haben, heißt ein ebener geradlinigter Winkel. Die geraden Linien A C, A B heißen seine Schenkel, und der Punkt A, in welchem diese zusammenstoßen, sein Scheitel. Fig. 3.

1. Zusaz. Die Schenkel A C, A B eines ebenen geradlinigten Winkels C A B können außer dem Scheitel A in keinem andern Punkte zusammenstoßen.

Denn stießen sie noch in einem zweiten Punkte zusammen; so wären vom Punkte A nach diesem zweiten Punkte zwo gerade Linien möglich. Dieses aber ist unmöglich.

2. Zusaz. Da nun die Schenkel A C, A B ohne Ende fort verlängert werden können; so bleibt der Theil der Ebene, der zwischen den Schenkeln eines ebenen geradlinigten Winkels C A B enthalten

ist, nach der Seite C, B hin unbegrenzt, und gehe zwischen ihnen ohne Ende fort.

4. Erklärung.

Den unbegrenzten Theil der Ebene A C B A, der zwischen den Schenkeln A C, A B des Winkels C A B ohne Ende fort enthalten ist, wenn diese ohne Ende verlängert werden, nenne ich die Fläche des Winkels C A B.

1. Lehrsaz.

Wenn die Winkel C A B, c a b gleich sind; so sind auch ihre Flächen A C B A, a c b a gleich.

Fig. 3. 4.

Beweis. Denn man lege den Winkel c a b auf den Winkel C A B dergestalt, daß der Scheitel a in A, und der Schenkel a b in A B fällt; so kann der Schenkel a c weder innerhalb dem Winkel C A B in A D fallen, weil D A B < C A B, folglich auch kleiner, als c a b ist, noch außerhalb dem Winkel C A B in A F, weil F A B > C A B, folglich auch größer, als c a b ist, mithin fällt a c in A C, folglich deckt die Fläche des Winkels c a b die Fläche des Winkels C A B. Also sind beide Flächen gleich.

2. Lehrsaz

Wenn der Winkel c a b größer ist, als der Winkel D A B; so ist auch des erstern Fläche a c b a größer, als des leztern Fläche A D B A.

Beweis. Denn man lege den Winkel c a b auf den Winkel D A B so, daß der Punkt a in A und der Schenkel a b auf A B fällt; so kann der Schenkel b c nicht in den Schenkel A D fallen, weil sonst c a b = D A B wäre. Eben so wenig kann a c innerhalb dem Winkel D A B in A I fallen, weil sonst c a b kleiner, als D A B wäre. Mithin fällt der Schenkel a c außerhalb dem Winkel D A B in A C, folglich ist die Fläche des Winkels D A B ein Theil der Fläche des Winkels c a b. Also ist die Fläche a c b a größer, als die Fläche A D E A.

3. Lehrsaz

Wenn die Flächen der Winkel C A B, c a b gleich sind; so sind die Winkel C A B, c a b selbst gleich.

Beweis. Denn wäre einer von beiden Winkeln größer, als der andere; so wäre auch die Fläche des einen größer, als die Fläche des andern (2 Lehrsaz). Da nun dieses wider die Voraussezzung ist; so kann keiner von beiden Winkeln größer, als der andre seyn. Also sind beide Winkel einander gleich.

4. Lehrsaz.

Wenn die Fläche des Winkels c a b größer ist, als die Fläche des Winkels D A B; so ist auch der Winkel c a b größer, als der Winkel D A B.

Beweis. Denn wären die Winkel c a b, D A B

gleich; so wären auch ihre Flächen gleich (1. Lehrs. 2). Wäre der Winkel c a b kleiner, als der Winkel D A B; so wäre auch die Fläche des Winkels c a b kleiner, als die Fläche des Winkels D A B (2. Lehrs.). Da nun beides wider die Voraussezzung ist; so kann weder c a b = D A B, noch c a b kleiner, als D A B seyn. Also ist der Winkel c a b gröſser, als der Winkel D A B.

Anmerkung.

Diese 4 Lehrsäze sind so einleuchtend, daß ich sie als bloße Grundsäze ohne allen Beweis hätte voraussezzen können. Denn alle Geometer nehmen es als Axiomen an, daß gleiche Winkel einander allemal decken, und daß daher von zween ungleichen Winkeln der kleinere nur einen Theil des gröſsern deckt. Da nun das Decken der Winkel nichts anders, als das Decken ihrer unbegrenzten Flächen ist; so sind es auch Grundsäze, daß gleiche Winkel gleiche Flächen haben, und daß ein gröſserer Winkel auch eine gröſsere Fläche hat, als ein kleinerer. Weil indeſsen die Geometer die Flächen der Winkel bisher in keine Betrachtung gezogen; so habe ich es für nöthig gehalten, diese Säze mit der gröſsten geometrischen Schärfe zu beweisen.

5. Lehrsaz.

Wenn zwo gerade Linien C F, C D, die in einem Punkte C zusammenstoßen, von einer dritten M B in A und I geschnitten werden, so ist der äußere Winkel C I B größer, als der entgegengesezte innere C A B. Fig. 5.

Beweis. Denn man verlängere F C willkührlich bis N, und ziehe durch N und I die gerade Linie N Q; so besteht die Fläche des Winkels M I D aus der Fläche des Winkels M A F, aus der unbegrenzten Fläche F A I Q und aus der Fläche des Winkels Q I D, folglich ist die Fläche des Winkels M I D größer, als die Fläche des Winkels M A F (Euklid. 9 Grundsaz), also ist auch der Winkel M I D größer, als der Winkel M A F (4 Lehrs.). Nun aber ist der Winkel M I D = C I B, und M A F = C A B (Euklid. 15. Saz). Also ist der Winkel C I B größer, als der Winkel C A B.

Anmerkung.

Dieser fünfte Lehrsaz ist unter den Sazen des Euklides der 16te, und von ihm aus der Gleichheit und Aehnlichkeit der Dreyeke bereits in aller Schärfe bewiesen worden. Allein aus dem neuen Beweise, den ich hier von diesem Saze gegeben, sieht man, daß derselbe sich schon unmittelbar aus

der Natur der Winkel aufs schärffte beweisen läst, ohne daß man erst die Lehre von der Congruenz der Dreyeke vorsausseszen darf.

6. Lehrsaz.

Wenn in einer Ebene zwo gerade Linien A B, C D
Fig. 1. von einer dritten K L in G und F dergestalt geschnitten werden, daß entweder

1) der äußere Winkel K G D so groß ist, als der entgegengesezte innere K F B, oder

2) die Wechselwinkel C G L, K F B gleich sind, oder

3) die beiden innern Winkel L G D und K F B zusammen so groß sind, als zween rechte Winkel; so sind die geraden Linien A B, C D parallel.

Beweis. Denn wenn 1) K G D = K F B ist; so können A B, C D nicht nach der Seite B, D hin zusammenstoßen, denn sonst wäre K G D größer, als K F B (5 Lehrs.). Eben so wenig können sie nach der Seite A, C hin zusammenstoßen, denn sonst wäre A F L größer, als C G L (5 Lehrs.), und da A F L = K F B, und C G L = K G D ist (Euklid. 15 Saz.); so wäre K F B größer, als K G D. Mithin können A B, C D nach keiner Seite zusammenstoßen. Also sind sie parallel (1 Erkl.)

2) Wenn C G L = K F B ist; so ist, weil K G D = C G L ist (Euklid. 15 S.), auch K G D = K F B.

Also

Also sind in diesem Fall A B, C D wiederum parallel (n. 1.)

3) Wenn L G D + K F B so groß ist, als zween rechte, so ist, weil L G D + K G D gleichfalls so groß ist, als zween rechte Winkel (Euklid. 13 S.), L G D + K G D = L G D + K F B (Euklid. 1 Grundſ.), folglich K G D = K F B (Euklid. 3 Grundſ.) Also sind auch in diesem Falle A B, C D parallel (n. 1.)

1. Zuſaz. Also sind alle gerade Linien C D, F G, H I u. ſ. w., welche eine andere A B unter gleichen nach eben der Seite liegenden Winkeln x, y, z schneiden, unter einander parallel. Fig. 6.

2. Zuſaz. Da nun alle rechte Winkel gleich sind (Eukl. 10 Grundſ.); so sind alle gerade Linien C D, F G, H I, die auf A B senkrecht stehen, unter einander parallel. Fig. 7.

I. Aufgabe.

Durch den Punkt G mit A B eine Parallele C D zu ziehen.

Auflöſung. Man ziehe aus G nach einem beliebigen Punkte F in A B die gerade Linie G F, richte auf G F in G einen Winkel F G C auf, der so groß ist, als der Winkel G F B (Euklid. 23 S.) und verlän- Fig. 1.

längere C G nach D; so ist C D mit A B parallel (6 Lehrsaz.)

7. Lehrsaz.

Fig. 2. Wenn in einer Ebene zwo gerade Linien F C, D G von einer dritten M B in A und I dergestalt geschnitten werden, daß der äußere Winkel G I B größer ist, als der entgegengesezte innere C A B; so müßen sie, wenn sie nach der Seite C, G hin, auf welcher die beiden Winkel G I B, C A B liegen, verlängert werden, nothwendig in irgend einem Punkte zusammenstoßen.

Beweis. Denn gesezt, die Linien F C, D G stießen nach der Seite C, G hin niemals zusammen, wenn sie gleich ohne Ende verlängert würden; so bliebe der Schenkel I G ohne Ende fort beständig auf eben derselben Seite von A C, folglich ohne Ende fort innerhalb der Fläche des Winkels C A B, mithin wäre die Fläche des Winkels G I B ein Theil der Fläche des Winkels C A B. Nun aber ist der Winkel G I B größer, als der Winkel C A B (vermöge der Voraussezzung), folglich ist auch die Fläche des Winkels G I B größer, als die Fläche des Winkels C A B (2 Lehrs.). Also wäre ein Theil von der Fläche des Winkels C A B größer, als diese Fläche selbst, das heißt, der Theil wäre größer, als das

Ganze

Ganze. Da nun dieſes der offenbarſte Widerſpruch iſt; ſo müſſen die Linien F C, D G nach der Seite C, G hin nothwendig einmal zuſammenſtoſſen.

Anmerkung.

Dieſer 7te Lehrſaz iſt eben der berüchtigte eilfte Grundſaz des Euklides, von dem man mit Recht einen Beweis fordert, den man aber bisher vergeblich geſucht hat. Der Beweis, den ich jezt davon gegeben habe, zeigt es nun, wie leicht und anſchaulich dieſer Saz in der gröſſeſten Schärfe, eben ſo, wie der vorige fünfte Lehrſaz, unmittelbar aus der Natur der Winkel bewieſen werden kann. Der ganze Beweis gründet ſich bloß auf die beiden Säze: ein gröſſerer Winkel hat auch eine gröſſere Fläche, und der Theil kann nicht gröſſer ſeyn, als das Ganze. Allein ein jeder von dieſen beiden Säzen iſt ſo offenbar und unwiderſprechlich gewiß, daß es Beleidigung der Vernunft ſeyn würde, ſie beweiſen zu wollen. Denn den erſtern habe ich ſtrenge bewieſen, und wer ihn leugnen wollte, der müßte auch leugnen, daß gleiche Winkel einander decken, d. h. ſich völlig ſubſtituiren laſſen, aber dann wäre die ganze Geometrie Unwahrheit. Was aber den andern Saz betrift, daß nemlich der Theil nicht gröſſer ſeyn kann, als das Ganze; ſo iſt dieſer ein

Grund-

Grundsatz von solcher Art, daß, wenn man ihn leugnen wollte, alle Beurtheilung des Größern und Kleinern gänzlich aufhören, und also die ganze Mathematik ein Unding seyn würde. Denn wir können uns auf keine andere Art die Größe A größer, als die Größe B vorstellen, als in so fern wir A als ein Ganzes und B als einen bloßen Theil von ihm betrachten, der an sich der Größe A noch nicht gleich ist, sondern der erst mit einer noch andern Größe C zusammen genommen die Größe A ausmacht. Könnte daher der Theil größer seyn, als das Ganze; so könnte das Ganze ein bloßer Theil von einem seiner Theile seyn. Auf diese Art wären also alle Begriffe vom Ganzen und seinen Theilen, vom Größern und Kleinern ein Gewebe von lauter Widersprüchen. Allein obgleich der Theil niemals größer seyn kann, als das Ganze; so kann man doch nicht allgemein sagen, daß der Theil allemal kleiner seyn müsse, als das Ganze, sondern es ist möglich, daß der Theil dem Ganzen völlig gleich seyn kann, wenn nemlich sein Nebentheil oder sein Complementum ad Totum gegen ihn ein völliges Nichts, oder unendlich klein ist. Denn man setze, ein Ganzes A bestehe aus den Theilen B und C. Da nun das Ganze A nur in so fern ein Ganzes heißt, in so fern man die mehreren Dinge B und C zusammengenommen,

men,

men, als ein Ding A betrachtet: so ist A = B + C. Nun setze man, der Theil C wäre gegen den Theil B für Nichts zu achten: so wäre B + C = B + o = B, folglich A = B, d. i. der Theil B wäre dem Ganzen A gleich. Daß es aber allerdings möglich ist, daß eine Größe C selbst dann, wenn sie an sich eine beträchtliche Größe hat, ja gar unendlich groß ist, dennoch gegen eine andere Größe B so unbeträchtlich seyn kann, daß sie gegen dieselbe völlig als Nichts anzusehen ist, so daß die Größe B unverändert bleibt, man mag C zu ihr addiren, oder von ihr subtrahiren, das ist eine Sache, die jedem Mathematiker bekannt ist. Also ist es ein fester Grundsatz, daß der Theil dem Ganzen gleich seyn kann, nemlich wenn sein Nebentheil gegen ihn = o oder unendlich klein ist. Daher ist der 9te Grundsatz des Euklides: das Ganze ist größer, als sein Theil, nur unter der Einschränkung richtig, wenn sein Nebentheil gegen ihn nicht unendlich klein ist, sondern ein bestimmtes Verhältniß hat, und es fließt hieraus folgendes allgemeine Axiom: das Ganze ist entweder größer, als sein Theil, oder ihm gleich, und daher ist umgekehrt der Theil entweder kleiner, als das Ganze, oder dem Ganzen gleich, aber niemals größer, als das Ganze. Hiedurch wird die Schärfe des vom 7ten Lehrsatz

gege-

gegebenen Beweises desto einleuchtender. Folgte nemlich in demselben aus der Annahme: F C, D G stoßen nach der Seite C, G hin niemals zusammen, dieser Satz: also ist der Theil dem Ganzen gleich; so hätte die Folge nichts Widersprechendes, und die Annahme bliebe also möglich. Allein da aus der Annahme folgt, daß der Theil größer seyn müsse, als das Ganze; so ist das Widersprechende dieser Folge ganz offenbar, und daher die Annahme unmöglich.

Der Fall, wo der Theil dem Ganzen gleich wird, kommt vor, wenn man annimmt, daß der äußere Winkel G I B dem innern C A B gleich ist. Man schließe hier eben so, wie ich im Beweise des 7ten Lehrsatzes geschlossen habe, so wird daraus gleichwohl nicht folgen, daß in diesem Fall F C, D G zusammenstoßen müßen. Der Schluß wird nemlich hier dieser seyn: Gesezt, F C, D G stießen nach der Seite C, G hin niemals zusammen; so bliebe der Schenkel I G ohne Ende fort innerhalb der Fläche des Winkels C A B, mithin wäre die Fläche des Winkels G I B ein Theil von der Fläche des Winkels C A B. Nun aber ist der Winkel G I B = C A B (vermöge der Voraussezung), folglich ist auch die Fläche des Winkels G I B der Fläche des Winkels C A B gleich (1. Lehrs.), also wäre der Theil dem Ganzen gleich. Dieses ist aber allerdings möglich, Al-

so

so ist es auch möglich, daß die Linien F C, D G nach der Seite C, G hin niemals zusammenstoßen.

Hieraus erhellet also, daß in diesem Fall kein Widerspruch in der Annahme, daß F C, D G niemals zusammenstoßen, gefolgert werden kann, sondern dadurch vielmehr der 6te Lehrsaz ein neues Licht erhält. Daß aber in diesem Fall die Fläche des Winkels G I B in der That der Fläche des Winkels C A B, von welcher sie nur ein Theil zu seyn scheint, gleich ist, ist unmittelbar aus dem 1sten Lehrsaze klar, und also ist dieses einer von den Fällen, wo der Theil dem Ganzen gleich ist, wie in der zweiten Beweisart noch deutlicher gezeigt werden soll.

Das hier Angeführte wird hoffentlich hinreichend seyn, allen Mißverständnißen vorzubauen, und einen jeden zu überzeugen, daß der gegebene Beweis so evident und bündig ist, als es nur irgend ein geometrischer Beweis seyn kann, um so mehr, da derselbe nicht nur ganz einfach und kurz, und daher sehr leicht zu übersehen, sondern auch die indirecte Form deßelben ganz von der gewöhnlichen Art ist, und zu denjenigen apagogischen Beweisen gehört, welche Euklides fast beständig gebraucht, und die daher die bekanntesten sind. Diese Beweisart durch die sogenannte deductionem ad absurdum hat in der Geometrie in denjenigen Fällen, wo die Nothwendigkeit

keit einer Sache dargethan werden soll, gewissermaaſsen selbſt einen Vorzug vor den directen Beweisen, indem man von der Nothwendigkeit einer Sache nicht vollkommener überzeugt werden kann, als wenn die Unmöglichkeit des Gegentheils erwiesen ist. Indessen ist es ein leichtes, den Beweis auch directo zu führen, und da ich nicht zweifele, daſs hiedurch die ganze Materie in ein desto helleres Licht gesetzt wird, so will ich noch die directe Form desselben beyfügen. Hier geht man auf folgende Art zu Werke:

Lehrsatz.

Wenn in einer Ebene zwo gerade Linien F C, D G nach der Seite C, G hin niemals zusammenstoßen; so ist, wenn sie von der geraden Linie M B in A und I geschnitten werden, der äussere Winkel G I B entweder kleiner, als der entgegengesetzte innere C A B, oder demselben gleich.

Beweis. Denn da in diesem Falle I G beständig auf eben derselben Seite von A C bleibt; so bleibt I G beständig innerhalb der Fläche des Winkels C A B, folglich ist die Fläche des Winkels G I B ein Theil von der Fläche des Winkels C A B, mithin ist sie entweder kleiner, als diese, oder ihr gleich. Also ist auch der Winkel G I B entweder kleiner, als der Winkel C A B, oder ihm gleich (3. 4. Lehrsatz).

Zusatz.

Zuſaz. Wenn daher der äußere Winkel GIB gröſſer iſt, als der entgegengeſezte innere; ſo müßen FC, DG nach der Seite C, G hin nothwendig zuſammenſtoßen.

Nachdem alſo der ſo lange geſuchte Beweis des 7ten Lehrſazes in der vollkommenſten geometriſchen Schärfe gegeben worden; ſo iſt die ganze wichtige Schwierigkeit in der Theorie der Parallellinien nunmehr völlig gehoben. Für Kenner iſt daher meine erſte Beweisart ſchon geendigt. Allein da ich bey meiner Abhandlung billig auch auf Anfänger Rückſicht nehmen muß, unter dieſen aber viele nach dem Wolfiſchen Lehrbuche auf einem Wege geführt zu werden pflegen, der von dem Euklideiſchen ganz verſchieden iſt; ſo halte ich es für nöthig, wenigſtens die vornehmſten Säze beizufügen, die ſich auf erwähnten Lehrſaz gründen, und zur eigentlichen Theorie der Parallellinien gehören. Dieſes wird zugleich dazu dienen, ihnen nicht nur die Wichtigkeit dieſes Lehrſazes, ſondern auch, durch Vergleichung mit meiner dritten Beweisart, die ganz entgegengeſezten Wege anſchaulich zu machen, welche man betreten muß, je, nachdem man die Parallellinien mit dem Euklides als nicht zuſammenſtoßende (non concurrentes), oder mit dem Hrn. v. Wolf

als, überall gleich weit abſtehende (aequidiſtantes) betrachtet.

8. Lehrſaz.

Wenn zwo gerade Parallellinien A B, C D von einer dritten geraden Linie K L in G und F geſchnitten werden; ſo iſt Fig. 1.

1) der äußere Winkel K G D ſo groß, als der entgegengeſezte innere K F B.

2) ſind die Wechſelwinkel C G L, K F B einander gleich.

3) ſind die beiden innern Winkel L G D und K F B zuſammen ſo groß, als zween rechte.

Beweis. Denn der Winkel K G D iſt entweder größer, oder kleiner, oder eben ſo groß, als der Winkel K F B. Nun aber kann K G D nicht gröſſer ſeyn, als K F B, denn ſonſt ſtießen A B, C D nach der Seite B, D hin zuſammen (7 Lehrſ.), folglich wären ſie nicht parallel (1 Erkl.). Eben ſo wenig kann K G D kleiner, als K F B ſeyn, denn da K G D = L G C, und K F B = L F A iſt, (Euklid. 15 S.); ſo wäre in dieſem Fall L G C kleiner, als L F A, folglich ſtießen A B, C D nach der Seite A, C hin zuſammen (7 Lehrſ.), mithin wären ſie wieder nicht parallel (1 Erkl.). Alſo iſt

1) der Winkel K G D = K F B.

Nun

Nun aber ist K G D = C G L (Euklid. 15 S.), also

2) der Winkel C G L = K F B

Da nun ferner K G D + L G D so groß ist, als zween rechte Winkel (Eukl. 13 S.), und

K G D = K F B ist (n. 1.); so ist auch

3) K F B + L G D so groß, als zween rechte Winkel.

Anmerkung.

Der 6te und 8te Lehrsaz sind in der Theorie der Parallellinien die beiden Hauptsäze, von denen alles übrige abhängt. Der 6te ist eine Folge des 5ten, und da dieser schon vom Euklides strenge bewiesen war, so war es auch jener. Der 8te aber setzt den 7ten voraus. Da man also vom 7ten keinen Beweis hatte; so war auch der Beweis des 8ten bisher mangelhaft.

9. Lehrsaz.

Eine gerade Linie F G, welche von zwo Parallelen A B, C D die eine C D in I schneidet, schneidet auch die andere A B. Fig. 8.

Beweis. Denn man ziehe durch I und einen willkührlichen Punkt M in A B die gerade Linie H L; so ist H I C = H M A (8 Lehrs.). Da nun H I G

$\triangleright$ H I C ist; so ist auch H I G $\triangleright$ H M A. Also stoßen F G, M A nach der Seite G A zusammen (7 Lehrs.)

Zusaz. Also ist durch den Punkt I mit A B nicht mehr, als eine Parallele C D möglich.

Denn jede andere gerade Linie F G, die durch I gehet, schneidet C D, also auch A B, und ist daher nicht mit A B parallel (1 Erkl.)

10. Lehrsaz.

Wenn zwo gerade Linien C D, F G mit einer dritten H I parallel sind; so sind sie mit einander selbst parallel.

Fig. 6.

Beweis. Denn man ziehe B K; so schneidet B K sowohl F G, als C D (9 Lehrs.), und es ist H K B $=$ F L B, und H K B $=$ C M B (8 Lehrs.), folglich F L B $=$ C M B (Eukl. 1 Gr.). Also sind C D, F G parallel (6 Lehrs.)

11. Lehrsaz.

Eine gerade Linie B K, die auf einer von zwo Parallelen H I, F G senkrecht ist, ist auch auf der andern senkrecht.

Fig. 7.

Beweis. Denn da B K die Linie I H schneidet; so schneidet sie auch ihre Parallele F G in L (9 Lehrs.), folglich ist H K B $=$ F L B (8 Lehrs.).

Nun

Nun aber iſt B K auf H I ſenkrecht (vermöge der Vorausſezzung), folglich iſt H K B ein rechter Winkel (Eukl. 10 Erkl.). Alſo iſt auch F L B ein rechter Winkel, und daher B L auf F G ſenkrecht.

2. Aufgabe.

Aus der gegebenen Seite A I und den beiden Winkeln C A I und G I A, wenn dieſe zuſammen kleiner ſind, als zween rechte, ein Dreyek zu beſchreiben. Fig. 9.

Auflöſung. Man verlängere die Schenkel A C, I G durch C und G; ſo ſtoßen ſie zuſammen, und geben das verlangte Dreyek A N I.

Beweiſs. Denn da C A I + G I A kleiner iſt, als zween rechte Winkel (vermöge der Vorauſſ.); ſo iſt G I B + G I A > C A I + G I A (Eukl. 13 S.), folglich G I B > C A I. Alſo ſtoßen A C, I G nach der Seite C, G hin zuſammen (7 Lehrſ.).

12. Lehrſaz.

In einem geradlinigten Dreyek A C B ſind alle drey Winkel zuſammen ſo groß, als zween rechte. Fig. 10.

Beweis. Denn man ziehe durch C mit A B die Parallele D F (1 Aufgabe); ſo iſt x = m, und z = n (8 Lehrſ.). Nun iſt x + y + z ſo groß, als zween rechte Winkel (Eukl. 13 S.). Alſo iſt auch m + y + n ſo groß, als zween rechte Winkel.

Zuſaz. Alſo iſt in einem Dreyek, das einen rechten Winkel hat, die Summe der beiden übrigen ſo groß, als ein rechter, mithin der rechte Winkel größer, als jeder der beiden übrigen.

13. Lehrſaz.

Wenn man die Seite A B eines Dreyeks A C B nach G verlängert; ſo iſt der äußere Winkel C B G ſo groß, als die beiden entgegengeſezten innern m und y zuſammen.

Fig. 10.

Beweis. Denn da m + y + n ſo groß iſt, als zween rechte Winkel (12 Lehrſ.); ſo iſt C B G + n = m + y + n (Eukl. 13 S.). Alſo iſt C B G = m + y (Eukl. 3 Gr.).

5. Erklärung.

Der Abſtand eines Punkts H von einer Linie A B heiſt die kleinſte gerade Linie, die aus H nach A B möglich iſt.

Fig. 11.

14. Lehrſaz.

Der Abſtand eines Punkts H von einer geraden Linie A B iſt die ſenkrechte Linie H I, die man aus H nach A B fallen läſt.

Beweis Denn wenn H I auf A B ſenkrecht iſt; ſo iſt der Winkel I ein rechter Winkel. Nun

ziehe

ziehe man aus H nach A B irgend eine andere gerade Linie H G; so ist der Winkel I größer, als n. (12 Lehrs. Z.); folglich H G größer, als H I (Eukl. 19 S.), mithin ist unter allen geraden Linien, die aus H nach A B möglich sind, die senkrechte H I die kleinste. Also ist sie der Abstand des Punkts H von A B (5 Erkl.)

15. Lehrsaz.

Zwo Parallellinien A B, C D stehen überall gleich weit von einander ab. Fig. 11.

Beweis. Denn man laße H I aus H, und aus einem andern willkührlichen Punkte F die Linie F G auf A B senkrecht fallen (Eukl. 12 S.); so sind F G, H I parallel (6 Lehrs. 2 Zus.). Nun ziehe man G H; so ist der Winkel x = y (8 Lehrs. n. 2). Allein da auch A B, C D parallel sind (vermöge der Voraussz.); so ist auch m = n (8 Lehrs. n. 2), mithin haben die Dreyeke H G F, H G I einerley Seite G H, und die beiden anliegenden Winkel gleich, also ist die Seite F G = H I (Eukl. 26 S.). Nun aber ist H I der Abstand des Punkts H, und F G der Abstand des Punkts F von A B (14 Lehrs.). Also steht in der Linie C D jeder Punkt F eben so weit von A B ab, als der Punkt H.

1. Zusaz. Da nun Parallellinien möglich sind

(1 Aufg.); so sind auch gerade Linien möglich, die überall gleich weit von einander abstehen.

2. Zusaz. Gerade Linien, die sich einander nähern, d. i. die nicht überall gleich weit von einander abstehen, sind nicht parallel. Also stoßen sie nothwendig zusammen (1 Erkl.).

16. Lehrsaz.

Fig. 11. Wenn zween Punkte F, H einer geraden Linie CD von einer andern AB gleich weit abstehen; so sind AB, CD Parallellinien.

Beweis. Denn man laße FG, HI auf AB senkrecht fallen; so ist FG der Abstand des Punkts F, und HI der Abstand des Punkts H von AB (14 Lehrs.), und FG mit HI parallel (6 Lehrs 2 Z.), folglich $x = y$ (8 Lehrs. n. 2). Da nun ferner $FG = HI$ (vermöge der Voraussf.) und $GH = GH$ ist; so ist in den Dreyeken HGF, HGI der Winkel $m = n$ (Eukl. 4 S.). Also ist AB mit CD parallel (6 Lehrs. n. 2).

1. Zusaz. Also sind gerade Linien, die überall gleich weit abstehen, Parallellinien.

2. Zusaz. Da nun auch umgekehrt Parallellinien gerade Linien sind, die überall gleich weit abstehen (15 Lehrs.); so sind Parallellinien und

über-

überall gleich weit abstehende gerade Linien einerley.

Anmerkung.

Hieraus erhellet also, daß es vollkommen gleichgültig ist, ob man die Parallellinien als non concurrentes, oder als aequidistantes betrachtet. Allein man sieht hieraus zugleich, daß der Beweis dieser Gleichgültigkeit schon den 7ten und 8ten Lehrsatz voraussetzt, und daß man also nicht berechtigt ist, diese Gleichgültigkeit ohne Beweis, als einen Grundsatz anzunehmen.

Da ferner, den 14ten Lehrsatz ausgenommen, alle übrigen vom 9ten bis zum 16ten den 7ten Lehrsatz voraussetzen; so ist schon hieraus einleuchtend, wie wichtig die Demonstration dieses Satzes, und die Theorie der Parallellinien überhaupt ist.

Der Theorie der Parallellinien

Zwote Beweisart.

In dieſer zwoten Beweisart bleibt bis zum 6ten Lehrſaze alles ſo, wie in der erſten. Nach dem 6ten Lehrſaze aber fahre ich alſo fort:

7. Lehrſaz.

Wenn in einer Ebene zwo gerade Linien F C, L K von einer dritten M B in A und I dergeſtalt geſchnitten werden, daß der äußere Winkel K I B dem entgegengeſezten innern C A B gleich iſt; ſo iſt die Fläche C A I K, welche zwiſchen A I und den beiden Linien A C, I K enthalten iſt, nach der Seite C, K hin unbegrenzt, und dieſe unbegrenzte Fläche C A I K iſt gegen die Fläche des Winkels K I B ein völliges Nichts. Fig. 12.

Beweis. Denn wenn K I B = C A B iſt; ſo ſind A C, I K parallel (6 Lehrſ.), folglich ſtoßen ſie nie zuſammen (1 Erkl.), alſo bleibt die Ebene C A I K unbegrenzt, und geht zwiſchen den Linien A C, I K ohne Ende fort. Mithin iſt die Fläche C A B = K I B † C A I K. Nun aber iſt die

Fläche

Fläche CAB = KIB (1 Lehrſ.), folglich iſt die Fläche KIB = KIB + CAIK (Eukl. 1 Gr.). Alſo iſt CAIK = o (Eukl. 3 Gr.) d. i. die Fläche CAIK iſt gegen die Fläche des Winkels KIB ein völliges Nichts.

Anmerkung.

Hier haben wir alſo einen Fall, wo es ſich mit der gröſten geometriſchen Strenge erweiſen läſt, daß eine Größe, die an ſich unendlich groß iſt, gleichwohl gegen eine andere verglichen, von ſolcher Art ſeyn kann, daß ſie gegen dieſe ein wahres Nichts iſt, ſo daß dieſe weder vermehrt wird, wenn man jene zu ihr addiret, noch vermindert wird, wenn man jene von ihr ſubtrahirt. Denn die Fläche des Winkels KIB wird nicht im mindeſten gröſſer, wenn man die ohne Ende fortgehende Fläche CAIK zu ihr addirt, noch kleiner, wenn man ſie von ihr ſubtrahirt. Alſo iſt die Fläche CAIK in Vergleichung mit der Fläche des Winkels KIB ein wahres Nichts, obgleich ſie an ſich ſelbſt betrachtet von unendlicher Größe iſt. Die Wahrheit dieſes Satzes läſt ſich auch auf eine andere Art ganz evident zeigen.

Man ſezze z. B. die gerade Linie MB gehe nach beiden Seiten ohne Ende fort, und nehme in derſelben einen beliebigen Punkt I an; ſo iſt offenbar die

ohne

ohne Ende fortgehende Linie I B eben so groß, als die nach der andern Seite ohne Ende fortgehende Linie I M, denn wenn man die eine auf die andere legt; so decken sie einander ohne Ende, folglich ist I B = ½ M B. Allein aus eben dem Grunde folgt, daß auch A B = A M ist, denn wenn man A B auf A M legt, so decken sie einander gleichfalls ohne Ende fort, folglich ist auch A B = ½ M B. Mithin ist I B = A B. Da nun A B = I B + A I ist; so ist I B = I B + A I, also A I = 0, d. h. A I ist gegen den ohne Ende fortgehenden Schenkel I B ein wahres Nichts. Also ist es für die Größe der Fläche des Winkels K I B gleichgültig, ob sein Scheitel in I oder A, und daher sein zweiter Schenkel in I K, oder in A C liegt, und also kommt die Fläche C A I K bey der Fläche des Winkels K I B in gar keine Betrachtung, man mag A I so groß annehmen, als man wolle. Hiedurch erhält nicht nur mein erster und dritter Lehrsaz, sondern auch dasjenige, was ich in der dritten Anmerkung der ersten Beweisart beigebracht habe, seine völlige Aufklärung.

Wenn aber gesagt wird, daß eine Größe gegen eine andere ein völliges Nichts, oder eine Null ist; so ist es vor sich klar, daß hier blos ein relatives Nichts gemeint wird, denn wäre sie ein absolutes

Nichts;

Nichts; so wäre es ein Widerspruch, sie eine Größe zu nennen.

Die Mathematiker nennen daher dergleichen Größen, die gegen andere ein relatives Nichts sind, unendlich klein, nemlich wenn die Größe B eine solche ist, daß die Größe A, die mit ihr von einerley Art ist, weder vermehrt, noch vermindert wird, man mag die Größe B zu ihr addiren, oder von ihr subtrahiren; so heißt B gegen A unendlich klein, und A gegen B unendlich groß. Mithin heißt der eben bewiesene 7te Lehrsaz in der eigentlichen mathematischen Sprache also: wenn der äußere Winkel K I B dem innern C A B gleich ist, so ist die unbegrenzte Fläche C A I K gegen die Fläche des Winkels K I B unendlich klein, und diese gegen jene unendlich groß. Unendlich klein und unendlich groß sind also bloß relative Begriffe, und hieraus ist zugleich begreiflich, wie verschiedne Ordnungen oder Grade des unendlich Kleinen möglich sind, indem eben dieselbe Größe B, die gegen eine andere A unendlich klein ist, gegen eine dritte C unendlich groß seyn kann, und so ist es möglich, daß C gegen eine Größe B, die selbst unendlich klein ist, wieder unendlich klein, und folglich schon ein unendlich-kleines vom 2ten Grade sey, z. E. jede begrenzte Fläche, oder ebene Figur ist gegen die unbegrenzte Fläche

C A I K

CAIK unendlich klein, und diese ist wieder gegen die Fläche des Winkels KIB unendlich klein, also ist jede ebene Figur, sie sey so groß, als man wolle, gegen die Fläche eines ebenen geradlinigten Winkels schon ein unendlich Kleines, oder ein relatives Nichts vom 2ten Grade, oder von der 2ten Ordnung.

8. Lehrsatz.

Wenn in einer Ebene zwo gerade Linien FC, DG von einer dritten MB in A und I dergestalt geschnitten werden, daß der äußere Winkel GIB größer ist, als der entgegengesetzte innere CAB; so stoßen sie nach der Seite C, G hin, wo diese Winkel liegen, nothwendig zusammen. Fig. 12.

Beweis. Denn man richte auf BI in I einen Winkel BIK auf, der dem Winkel CAB gleich ist (Eukl. 23 S.). Da nun GIB größer, als CAB (vermöge der Voraussz.); so ist auch GIB größer, als KIB, folglich liegt der Schenkel IG außerhalb dem Winkel KIB zwischen IK und AC. Gesetzt nun, FC, DG stießen nach der Seite C, G hin niemals zusammen; so bliebe IG beständig zwischen IK und AC, folglich wäre die Fläche des Winkels GIK ein Theil der unbegrenzten Fläche CAIK. Da nun diese gegen die Fläche des Winkels KIB

eine

eine Null ist (7 Lehrs.); so wäre auch jene gegen sie eine Null, folglich wäre die Fläche des Winkels G I B der Fläche des Winkels K I B gleich, mithin wäre der Winkel G I B dem Winkel K I B gleich (3 Lehrs.), also auch G I B = C A B. Da nun dieses wider die Voraussezzung ist; so müßen F C, D G nach der Seite C, G hin nothwendig zusammenstoßen.

Anmerkung.

Hier haben wir also den zweiten strengen Beweis für den eilften Euklidei'schen Grundsaz, oder für den 7ten Lehrsaz in unserer ersten Beweisart. Aus diesem folgt nun das Uebrige alles so, wie es in der ersten Beweisart vom 8ten Lehrsaze an vorgetragen worden.

Der Theorie der Parallellinien

Dritte Beweisart.

Bey dieſer dritten Beweisart bleibt ebenfalls bis zum 6ten Lehrſaze alles ſo, wie in der erſten Beweisart, außer daß man hier für den 5ten Lehrſaz, der beim Euklides der 16te Saz iſt, ſtatt des von mir gegebenen neuen Beweiſes den bekannten Beweis des Euklides beibehalten kann. Nach dem 6ten Lehrſaz der erſten Beweisart folgt der 7te Lehrſaz der zweiten Beweisart. Hierauf verfahre ich folgendermaaßen:

8. Lehrſaz.

Wenn man durch die Schenkel F G, F B eines Winkels G F B eine beliebige gerade Linie D C zieht; ſo iſt das Dreyek F D C gegen die Fläche des Fig. 13. Winkels G F B ein völliges Nichts, und daher die unbegrenzte Fläche C D G B, die zwiſchen C D, D G und C B ohne Ende fort enthalten iſt, eben ſo groß, als die Fläche des Winkels G F B.

Beweis. Denn man mache den Winkel G D I = G F B (Euklid. 23 S.); ſo iſt die unbegrenzte Fläche

Fläche F D I B gegen die Fläche des Winkels G D I ein völliges Nichts (7 Lehrſ. der 2ten Beweisart). Da nun das Dreyek F D C bloß ein Theil der Fläche F D I B iſt; ſo iſt um ſo mehr das Dreyek F D C gegen die Fläche des Winkels G D I ein Nichts, folglich auch gegen die Fläche des Winkels G F B (1 Lehrſ.). Nun iſt die unbegrenzte Fläche C D G B ſo groß, als die Fläche des Winkels G F B, weniger dem Dreyeke F D C. Alſo iſt die unbegrenzte Fläche C D G B eben ſo groß, als die Fläche des Winkels G F B.

9. Lehrſaz.

Die ganze unbegrenzte Ebene, die über einer nach beiden Seiten ohne Ende fortgehenden geraden Linie A B liegt, iſt ſo groß, als die Fläche von zween rechten Winkeln. Fig. 14.

Beweis. Denn man ziehe willkührlich C D; ſo beſteht die ganze unbegrenzte Ebene über der unbegrenzten Linie A B aus den Flächen der Winkel D C A und D C B. Nun aber ſind dieſe beiden Winkel zuſammen ſo groß, als zween rechte (Eukl. 13 S.). Alſo iſt die ganze unbegrenzte Ebene über A B ſo groß, als die Fläche von zween rechten Winkeln.

10. Lehrſaz.

Wenn man eine Seite F C des Drepeks F D C
Fig. 15. nach B verlängert; ſo iſt der äuſſere Winkel D C B ſo groß, als die beiden entgegengeſezten innern D F C und F D C zuſammen.

Beweis. Denn man verlängere F D nach G, und C D nach K; ſo beſteht die Fläche des Winkels D C B oder K C B aus der unbegrenzten Fläche C D G B und der Fläche des Winkels K D G. Nun iſt die Fläche C D G B ſo groß, als die Fläche des Winkels G F B oder D F C (8 Lehrſ.), folglich iſt die Fläche des Winkels D C B ſo groß, als die Flächen der Winkel D F C und K D G zuſammen, mithin iſt der Winkel D C B = D F C + K D G (3 Lehrſ.). Nun aber iſt der Winkel K D G = F D C (Eukl. 15 S.). Alſo iſt der Winkel D C B = D F C + F D C.

11. Lehrſaz.

Fig. 15. In jedem Drepek F D C ſind die drey Winkel zuſammen ſo groß, als zween rechte.

Beweis. Denn man verlängere alle drey Seiten; ſo ſind die Winkel D F C und F D C zuſammen ſo groß, als der Winkel K C B (10 Lehrſ.), folglich ſind auch die Flächen der Winkel D F C und F D C zuſammen ſo groß, als die Fläche des Winkels K C B (1 Lehrſaz.). Nun aber macht die Fläche des

Winkels K C B mit der Fläche des Winkels K C A zusammen die ganze unbegrenzte Ebene über A B aus, folglich ist sie so groß, als die Fläche von zween rechten Winkeln (9 Lehrs.). Mithin sind die Flächen aller drey Winkel F, D, C zusammen so groß, als die Fläche von zween rechten Winkeln. Also sind alle drey Winkel F, D, C zusammen so groß, als zween rechte (3 Lehrs.).

Zusaz. Also ist in einem Dreyek, das einen rechten Winkel hat, die Summe der beiden übrigen so groß, als ein rechter, mithin der rechte Winkel größer, als jeder der beiden übrigen.

Anmerkung.

Diesen 10ten und 11ten Lehrsaz, welche in meiner ersten Beweisart der 13te und 12te sind, hat man bisher nicht anders beweisen können, als auf die Art, wie ich sie dort bewiesen habe, nemlich so, daß ihr Beweis schon den eilften Grundsaz des Euklides voraussezt. Aus dem neuen Beweise aber, den ich jezt von ihnen gegeben habe, erhellet, wie diese Säze auch ohne den eilften Grundsaz des Euklides sich unmittelbar aus der Natur der Winkel herleiten lassen, und zwar mit solcher Evidenz, daß selbst das Auge über ihre Richtigkeit urtheilen und sehen kann, wie in jedem Dreyeke die Flächen der drey Winkel

gerade die ganze unbegrenzte Ebene über der nach beiden Seiten ohne Ende verlängerten Grundlinie F C, mithin die Fläche zweener rechten Winkel ausmachen.

Denn die ganze Ebene über A B besteht aus der Fläche des Winkels A C K, aus der Fläche des Winkels K D G, und aus der unbegrenzten Fläche G D C B. Die Fläche des Winkels K D G aber ist eben so groß, als die Fläche des Winkels F D C, weil beide Winkel als Vertikalwinkel gleich sind, und die unbegrenzte Fläche G D C B ist die Fläche des Winkels G F B, weil das Dreyek F D C, welches zu ihr noch fehlt, gegen sie ein völliges Nichts, und zwar ein Nichts, oder unendlich Kleines vom 2ten Grade ist. Also besteht die ganze Ebene über A B aus den Flächen der drey Winkel A C K, F D C, G F B, d. i. aus den drey Winkeln des Dreyeks F D C, und so ist offenbar, daß die Flächen dieser drey Winkel gerade die Fläche zweener rechten Winkel ausmachen. Ich habe diese unnöthig scheinende Wiederholung des Beweises mit gutem Bedacht beygefügt, um in dieser bisher ganz ungewohnten Vorstellungsart einigen meiner Leser den wahren Gesichtspunkt, aus welchem die Sache betrachtet werden muß, desto näher und deutlicher zu bezeichnen. Beweise von dieser Art, die den Satz ganz anschaulich darstellen, sind in der

Geo-

Geometrie, deren Hauptvorzug vor den übrigen Wissenschaften Anschauung ist, unter allen die schätzbarsten. Ich zweifle daher nicht, daß jeder Freund der Geometrie, bey der ersten völligen Uebersicht des gegebenen Beweises, eben das Vergnügen empfinden wird, das mich überraschte, da ich auf einmal die drey Winkel des Dreyecks so vor mir sahe, daß sie gerade die Fläche von zween rechten Winkeln ausfülleten.

Allein da nun dieser sogenannte kleinere Pythagorische Lehrsaz auf eine von der Theorie der Parallellinien ganz unabhängige Art erwiesen worden: so eröffnet dieses nunmehr einen neuen Weg, gedachte Theorie auch nach demjenigen Lehrbegriff ganz strenge zu demonstriren, da man die Parallellinien als rectas aequidistantes betrachtet. Zu diesem Ende muß hier unmittelbar nach dieser Anmerkung die 5te Erklärung nebst dem 14ten Lehrsaz aus der ersten Beweisart eingerückt werden, der also hier der 12te Lehrsaz wird. Alsdenn fahre ich also fort:

13. Lehrsaz.

Wenn in einer Ebene zween Punkte F und H, die in der graden Linie C D liegen, von der graden Linie A B gleich weit abstehen; so sind die Linien Fig. 11.
F G, H I, die man aus F und H auf A B senkrecht

fallen läßt, auch auf C D senkrecht, und F H = G I.

Beweis. Denn man ziehe G H. Da nun F G, H I auf A B senkrecht sind (vermöge der Vorausſ.); so ist sowohl x † n, als o, ein rechter Winkel, folglich ist auch y † s ein rechter Winkel (11 Lehrſ. Zuſ.), mithin x † s = y † s, also x = y. Nun aber ist in den Dreyecken F G H und I H G auch G H = H G, und da F und H von A B gleich weit abstehen (vermöge der Voraussetzung); so ist auch F G = H I (14 Lehrſ.). Also ist F H = G I, F = o und m = n (Eukl. 4 S.), folglich y † m = x † n (Eukl. 2 Gr.), mithin sowohl F, als y † m ein rechter Winkel. Also sind F G, H I auf C D senkrecht.

1. Zuſaz. Wenn daher zwo gerade Linien C D, A B überall gleich weit von einander abstehen: so ist jede Linie F G, die man aus C D auf A B senkrecht fallen läßt, auch auf C D senkrecht.

2. Zuſaz. Wenn daher eine gerade Linie F H eine von zwo überall gleich weit abstehenden geraden Linien C D, A B senkrecht schneidet; so schneidet sie auch die andere senkrecht. Fig. 16.

Denn man laße H G auf A B senkrecht fallen: so ist H G auch auf C D senkrecht (1 Zuſ.). Da nun auf C D in H nicht mehr, als eine senkrechte Linie mög-

möglich ist; so ist H G die Verlängerung von P H. Also schneidet P H auch A B senkrecht.

Anmerkung.

Der Herr v. Wolf beweist den 2ten Zusaz in seinen Elem. Geometr. §. 230, auf eine von unserm 11ten Lehrsaz unabhängige Art. Allein sein Beweis ist fehlerhaft, denn er nimmt in demselben unerwiesen an, daß eine jede Linie, die man auf der einen von zwo gleich weit abstehenden Linien senkrecht aufrichtet, die andere schneiden müße. Indeßen laßen sich diese beiden Zusäze auch ohne unsern 11ten Lehrsaz richtig auf folgende Art erweisen: Wenn F G auf A B senkrecht ist, so laße man aus G auf C D eine senkrechte Linie G H fallen. Gesezt nun F G wäre nicht auf C D senkrecht; so wären G H, G F zwo verschiedene Linien, und da m ein rechter Winkel ist; so wäre G H kleiner, als F G (Eukl. 19 S.). Man laße daher aus H auf A B die senkrechte Linie H I fallen; so ist G H größer, als H I (Eukl. 19 S.). Nun aber stehen alle Punkte in C D von A B gleich weit ab (vermöge der Vorauss.), folglich ist H I = F G. Mithin wäre G H größer, als F G. Da es nun widersprechend ist, daß G H kleiner, als F G und zugleich größer, als F G seyn

Fig. 22.

sollte; so muß F G auf C D senkrecht seyn. Und hieraus folgt also auch, wie ich gezeigt habe, der 2te Zusaz. Was aber den 13 Lehrsaz betrift; so läst sich derselbe auf diese Art nicht beweisen; sondern dieser sezt schon entweder den 11ten Lehrsaz, oder die beiden Hauptsäze von den Parallellinien nothwendig voraus.

14. Lehrsaz.

Wenn in einer Ebene die gerade Linie F G auf Fig. 11. zwo geraden Linien A B, C D zugleich senkrecht ist; so stehen diese überall gleich weit von einander ab.

Beweis. Denn man nehme in C D einen beliebigen Punkt H an, mache G I = F H, und ziehe G H, H I. Da nun sowohl x + n, als F ein rechter Winkel ist (Voraussez.); so ist auch x + m ein rechter Winkel (11 Lehrs. Zus.); folglich x + n = x + m, also n = m. Mithin ist in den Dreyeken I G H, F H G, die Seite H I = F G, und der Winkel o = R (Eukl. 4 B.), folglich o ein rechter Winkel, und daher H I der Abstand des Punkts H von A B. Also stehe in der Linie C D jeder Punkt H eben so weit von A B ab, als der Punkt F, d. h. C D, A B stehen überall gleich weit von einander ab.

15. Lehr-

15. Lehrſatz.

Wenn in einer Ebene zween Punkte F, H einer geraden Linie C D von einer andern A B gleich weit abſtehen; ſo ſtehen C D, A B überall gleich weit von einander ab. Fig. 11.

Beweis. Denn man laße F G, H I auf A B ſenkrecht fallen; ſo ſind ſie auch auf C D ſenkrecht (13 Lehrſatz.). Alſo ſtehen C D, A B überall gleich weit von einander ab (14 Lehrſ.).

Zuſatz. Wenn daher zwo gerade Linien K I, F G von einer dritten C D überall gleich weit abſtehen; ſo ſtehen ſie von einander ſelbſt überall gleich weit ab. Fig. 7.

Denn man laße P N, K L auf F G ſenkrecht fallen, ſo ſchneiden P N, K L auch C D in O, M ſenkrecht (13 Lehrſ. a. Z.). Nun aber iſt P O = K M, und N O = L M (Vorausſ.), folglich iſt P N = K L (Eukl. 3 Gr.). Alſo ſtehen auch K I, F G von einander überall gleich weit ab (15 Lehrſ.).

Anmerkung.

Der Beweis, welchen Wolf in ſeinen Elem. Geometr. §. 232 von dieſem Zuſatze giebt, iſt unzureichend. Denn er nimmt in demſelben unſern 15ten Lehrſatz unerwieſen an.

16. Lehrſatz.

Wenn in einer Ebene zwo gerade Linien A B, C D welche überall von einander gleich weit abſtehen, von einer dritten P G geſchnitten werden; ſo ſind

Fig. 10. 1) die Wechſelwinkel m, n gleich

2) der äußere Winkel p dem entgegengeſetzten innern n gleich, und

3) die beiden innern G H D und n zuſammen ſo groß, als zween rechte.

Beweis. Dann die ſchneidende Linie P G iſt entweder auf A B ſenkrecht, oder nicht.

Iſt P G auf A B ſenkrecht; ſo iſt ſie auch auf Fig. 12. C D ſenkrecht (13 Lehrſ. 1 Zuſ.), alſo ſind hier n, m, p und G H D lauter rechte Winkel, alſo n $=$ m, p $=$ n, und G H D $+$ n zween rechten Winkeln gleich.

Iſt aber P G auf A B nicht ſenkrecht; ſo laße man Fig. 11. H I auf A B ſenkrecht fallen; ſo iſt H I auch auf C D ſenkrecht (13 Lehrſ. 1 Zuſ.), folglich iſt ſowohl o, als m $+$ y ein rechter Winkel, alſo auch n $+$ y (11 Lehrſ. 3.), mithin m $+$ y $=$ n $+$ y. Alſo iſt 1) m $=$ n.

Da nun m $=$ p iſt; ſo iſt auch 2) p $=$ n, und da p $+$ G H D ſo groß iſt, als zween rechte Winkel; ſo iſt endlich 3) auch n $+$ G H D zween rechten Winkeln gleich.

17. Lehrſatz.

Wenn in einer Ebene zwo gerade Linien A B, C D von einer dritten P G dergeſtalt geſchnitten werden, F. 10. 26. daß entweder

1) die Wechſelwinkel m, n gleich ſind, oder

2) der äußere p dem innern n gleich iſt, oder

3) die beiden innern n + ϕ H D zween rechten gleich ſind; ſo ſtehen A B, C D überall gleich weit von einander ab.

Beweis. Denn m und n ſind entweder rechte Fig. 26. Winkel, oder nicht. Sind ſie rechte Winkel; ſo ſteht P G auf beiden Linien A B, C D ſenkrecht, alſo ſtehen ſie überall gleich weit ab (14 Lehrſ.).

Sind aber m, n nicht rechte Winkel; ſo laſſe man H I auf A B, und G F auf C D ſenkrecht fallen. Fig. 27. Da nun F und o rechte Winkel ſind; ſo ſind auch x + m, und y + n rechte Winkel (11 Lehrſ. Zuſ.), folglich x + m = y + n. Nun aber iſt m = n (1 Vorausſ.), folglich x = y; mithin x + n = y + n (Eukl. 2 Gr.), folglich x + n ein rechter Winkel, mithin ſteht G F nicht nur auf C D, ſondern auch auf A B ſenkrecht. Alſo ſtehen A B, C D überall gleich weit von einander ab (14 Lehrſ.).

Iſt p = n, oder n ∥ G H D zween rechten Winkeln gleich; ſo iſt in beiden Fällen m = n. Alſo iſt der Saz auch unter dieſen Bedingungen wahr.

Anmerkung.

Der 16te und 17te Lehrſaz ſind die beiden Hauptſäze in der Theorie der Parallellinien, wenn man leztere als aequidiſtantes betrachtet. Da man mit gedachter Theorie nicht fertig werden konnte, wenn man mit dem Euklides die Parallellinien als non concurrentes anſieht; ſo verſuchte man, die Schwierigkeit dadurch zu heben, daß man ſie als aequidiſtantes behandelte. Der 16te Lehrſaz ließ ſich aus den bekannten Principiis der Geometrie auch in der That in aller Schärfe beweiſen, und der Beweis, den Wolf von demſelben giebt, iſt vollkommen bündig. Allein hier lag die Schwierigkeit im 17ten Lehrſaze. Dieſen aus den gewöhnlichen Principiis zu beweiſen, war alle Mühe vergebens, und eben hiedurch gerieth man in ein noch größeres Labyrinth. Denn dadurch entſtand ſogar die Frage, ob auch rectae aequidiſtantes möglich ſeyn, die gleichwohl nothwendig unbeantwortet bleiben muſte, ſo lange der 17te Lehrſaz unerwieſen blieb. In dem Beweiſe, welchen Wolf in ſeinem Auszuge §. 73

und

und in seinen Elem. Geom. §. 255. von diesem Satze giebt, ist der Fehler offenbar. Er schließt also: „Man laße H I auf A B senkrecht fallen, mache H I = I G, und ziehe G F. Da nun m = n ist „(Voraus.); so ist G F = H I, und F = o, folglich F ein rechter Winkel, mithin G F auf C D „senkrecht. Also stehen C D, A B überall gleich „weit von einander ab.„

Allein wenn diese lezte Schlußfolge richtig seyn soll; so kommt es nicht darauf an, ob G F auf C D senkrecht ist; sondern es müste bewiesen werden, daß G F auf A B senkrecht sey. Alsdenn wäre die Folge richtig, daß die beiden Punkte F und H von A B gleich weit abstehen. Aber auch hiedurch wäre der Saz selbst noch nicht bewiesen. Denn der Saz behauptet, daß nicht bloß 2 Punkte, sondern überhaupt alle Punkte der Linie C D von A B gleich weit abstehen. Also müste jezt noch bewiesen werden, daß wenn 2 Punkte in C D von A B gleich weit abstehen, auch alle Punkte in C D insgesamt von A B gleich weit abstehen. Allein dieser Saz ist eben so schwierig, als der zu erweisende Hauptsaz selbst. Man kann das Mangelhafte des Wallisischen Beweises am deutlichsten durch folgende leichte Instanz erkennen:

Man

Man laße nämlich H I auf A B senkrecht fallen, mache A F = A I und A G = A H; so ist G F = H I und F = I ein rechter Winkel (Eukl. 4 S.), mithin steht G eben so weit von A C ab, als H von A B. Also müsten nach der Schlußart des Wolfischen Beweises die Linien A B, A C überall gleich weit von einander abstehen, welches offenbar ungereimt ist.

Fig. 17.

In seinen Elementis hat Wolf bey dieser Gelegenheit einen auffallenden Fehler wider die Methode begangen, indem er unsern 10ten Lehrsaz schon §. 239 aus der Möglichkeit gerader überall gleich weit abstehender Linien herleitet, diese Möglichkeit aber erst §. 258 beweiset. Besonders aber ist es zu verwundern, daß da er auf diese Art unsern 10ten und den darauf folgenden 11ten Lehrsaz schon einmal als völlig von ihm demonstrirt ansahe, er nachher denselben §. 255 nicht in dem Beweise unsers 17ten Lehrsazes genuzt hat, da doch dieser, wenn erst jener feststeht, sich aus demselben ganz strenge beweisen läst.

Aufgabe.

Fig. 1. Durch einen gegebenen Punkt G eine gerade Linie C D zu ziehen, die von einer gegebenen A B überall gleich weit absteht.

Auf-

Auflösung. Man ziehe G F nach einem beliebigen Punkt F in A B, richte in G einen Winkel F G C auf, der so groß ist, als G F B (Eukl. 23 S.) und verlängere C G nach D; so steht C D von A B überall gleich weit ab (17 Lehrs.).

18. Lehrsatz.

Durch den Punkt I ist nicht mehr, als eine gerade Linie C D möglich, die von A B überall gleich weit abstehet. Fig. 18.

Beweis. Denn man ziehe durch I irgend eine andere gerade Linie F K. Nun laße man I M auf A B, und K L auf I M senkrecht fallen; so steht K eben so weit von A B, als L (14 Lehrs.). Nun aber ist M I D ein rechter Winkel (13 Lehrs. 1 Zus.), folglich M I K ein spizer, mithin fällt K L zwischen I und M, folglich liegt I weiter von A B, als L, folglich auch weiter, als K, mithin steht F K nicht überall gleich weit von A B ab. Also ist außer C D keine andere solche Linie möglich.

19. Lehrsatz.

Die Schenkel A C, A B eines Winkels C A B Fig. 19. entfernen sich immer weiter von einander, je weiter sie verlängert werden.

Be-

Beweis. Denn man lasse aus 2 beliebigen Punkten F, H die Linien F G, H I auf A B, und F O auf H I senkrecht fallen; so ist F G = O I (14 Lehrs.). Nun aber ist y kleiner, als ein rechter Winkel (11 Lehrs. Zus.), folglich fällt F O zwischen H und I, mithin ist H I grösser, als O I, also auch grösser, als F G. Also steht H weiter von A B ab, als F. Wäre der Winkel A stumpf; so fallen die senkrechten Linien F G, H I auf die entgegengesetzte Seite von A B, und der Beweis bleibt derselbe.

20. Lehrsatz.

Wenn man auf den Schenkel A C eines spitzen Winkels C A B einen Theil A F so viel mal aufträgt, als man will, und aus den Endpunkten F, H, K, M u. s. w. die Linien F G, H I, K L, M N u. s. w. auf A B senkrecht fallen läßt; so enthalten die abgeschnittenen Theile A I, A L, A N u. s. w. den Theil A G eben so viel mal, als die Theile A H, A K, A M u. s. w. den Theil A F enthalten.

Fig. 19.

Beweis. Denn man lasse F O, H P, K Q u. s. w. auf H I, K L, M N u. s. w. senkrecht fallen; so sind F O, H P, K Q u. s. w. Linien, die überall gleich weit von A B abstehen (14 Lehrs.), folglich ist F O = G I, H P = I L, K Q = L N u. s. w. (13 Lehrs.).

Lehrſ.). Nun aber ſtehen auch F G, H I, K L, M N von einander überall gleich weit ab (14 Lehrſ.); folglich iſt x = y = m = n u. ſ. w. (16 Lehrſ.). Da nun auch G, O, P, Q als rechte Winkel gleich ſind, und A F = F H = H K = K M iſt (Vorausſ.); ſo iſt A G = F O = H P = K Q u. ſ. w. (Eukl. 26 S.), folglich A G = G I = I L = L N u. ſ. w., alſo A I = 2 A G, A L = 3 A G, A N = 4 A G u. ſ. w. Da nun auch A H = 2 A F, A K = 3 A F, A M = 4 A F u. ſ. w.; ſo enthalten die Theile A I, A L, A N den Theil A G eben ſo vielmal, als die Theile A H, A K, A M u. ſ. w. den Theil A F enthalten.

21. Lehrſaz.

Eine gerade Linie F K, welche eine von zwo überall gleich weit abſtehenden geraden Linien C D, A B in I ſchneidet, ſchneidet auch die andere. Fig. 18.

Beweis. Denn man laße I M auf A B, und K L auf I M ſenkrecht fallen; ſo iſt I M auch auf C D ſenkrecht (13 Lehrſ. 1 Zuſ.), folglich M I D ein rechter Winkel, und M I K ein ſpizer. Geſezt nun F K ſchnitte niemals A B; ſo müſte F K ohne Ende verlängert immerfort zwiſchen C D und A B liegen. Nun verlängere man I M nach Z und trage I L ſo

vielmal auf I Z, bis man auf einen Punkt V kommt, der schon in der Verlängerung M Z liegt. Hierauf verlängere man I K nach G, trage I K eben so vielmal auf I G bis H, und laße H N auf I Z senkrecht fallen; so müste H zwischen A B und C D, folglich N zwischen L und M liegen, mithin wäre I N kleiner, als I V. Nun aber muß I N den Theil I L eben so vielmal enthalten, als I H den Theil I K enthält (20 Lehrs.), folglich so vielmal, als I V den Theil I L. Also wäre I N = I V. Da nun dieses dem vorigen widerspricht; so muß F K die Linie A B schneiden.

22. Lehrsaz.

Gerade Linien M K, B A, welche einander nähern, Fig. 19. stoßen nach eben der Seite, wenn sie verlängert werden, zusammen.

Beweis. Denn wenn K näher nach A B liegt, als M; so ist, wenn man K L, M N auf A B senkrecht fallen läst, M N größer, als K L. Man mache daher N Q = K L; so steht K Q von A B überall gleich weit ab (15 Lehrs.). Da nun M K die Linie K Q schneidet; so schneidet sie auch B A (21 Lehrs.).

An-

Anmerkung

Der Herr v. Wolf nimmt diesen Saz ohne Beweis an. Denn wenn er Elem. Geom. §. 264 zeigt, wie sich aus 2 Winkeln, welche zusammen kleiner, als zwei rechte sind, und der anliegenden Seite allemal ein Dreyek beschreiben laße; so beruft er sich im Beweise, daß die beiden Schenkel verlängert einander schneiden, auf §. 262, wo er aber nichts weiter erwiesen hat, als daß die Linien in diesem Fall einander nähern. Daß man aber den Saz, daß gerade Linien, welche einander nähern, auch nothwendig einmal zusammenstoßen und sich schneiden müßen, nicht ohne Beweis anzunehmen berechtigt ist, erhellet daraus, weil es wirklich Linien giebt, die einander beständig nähern, ohne gleichwohl jemals zusammen zu stoßen. Denn aus der höhern Geometrie ist bekannt, daß eine gerade Linie sich einer krummen z. E. einer Hyperbel, oder der logistischen Linie, beständig nähern kann, ohne daß sie jemals mit ihr zusammen kommt. Also muß nothwendig bewiesen werden, daß dieses bey zwo geraden Linien nicht statt findet.

23. Lehrsaz.

Wenn in einer Ebene zwo gerade Linien F C, D G von einer dritten M B in A und I dergestalt Fig. 12.

geschnitten werden, daß der äußere Winkel G I B größer ist, als der entgegengesezte innere C A B; so stoßen sie nach der Seite C, G hin, wo diese Winkel liegen, zusammen.

Beweis. Denn man mache den Winkel B I K = C A B (Eukl. 23 S.); so stehen L K, F C von einander überall gleich weit ab (17 Lehrs. n. 2.). Also schneidet die Linie D G, welche L K in I schneidet, auch die Linie F C (21 Lehrs.). Nun aber kann dieses nicht nach der Seite F, D hin geschehen, weil I D sich von I L und also auch von A F immer weiter entfernet (19 Lehrs.). Also schneiden sich F C, D G nach der Seite C, G hin.

Anmerkung.

Hier haben wir also nunmehr den dritten strengen Beweis vom eilften Grundsaz des Euklides.

24. Lehrsaz.

Gerade Linien, die von einander überall gleich weit abstehen, sind parallel.

Beweis. Denn gesezt, sie wären nicht parallel; so stießen sie zusammen (1 Erkl.) und machten also einen Winkel (3 Erkl.), folglich entfernten sie

sich

sich immer weiter von einander (19 Lehrs.), also stünden sie von einander nicht überall gleich weit ab. Da nun dieses wider die Voraussezzung ist; so sind sie parallel.

25. Lehrsaz.

Gerade Parallellinien stehen von einander überall gleich weit ab.

Beweis. Denn wäre dieses nicht; so müsten sie sich nach einer Seite nähern, folglich stießen sie zusammen (22 Lehrs.), mithin wären sie nicht parallel (1 Erkl.). Da nun dieses wider die Voraussezzung ist; so stehen sie von einander überall gleich weit ab.

Zusaz. Da nun auch umgekehrt gerade von einander überall gleich weit abstehende Linien Parallellinien sind (24 Lehrs.); so sind gerade Parallellinien und überall gleich weit von einander abstehende gerade Linien einerley.

Theorie der Parallelen

Zweiter Abschnitt

Theorie der parallelen Ebenen

1. Erklärung.

Eine Fläche heißt eben, oder eine Ebene, wenn jede gerade Linie, die von irgend einem Punkte derselben zu irgend einem andern derselben gezogen wird, ganz in derselben liegt. Dagegen heißt eine Fläche krumm, wenn kein Theil derselben eben ist.

1. Forderungs-Saz.

Von einer geraden Linie A B ist durch jeden Punkte C, der außerhalb ihr liegt, eine Ebene möglich. Fig. 10.

1. Zusaz. Also ist durch drey Punkte A, B, C, die nicht in einer geraden Linie liegen, allemal eine Ebene möglich.

Denn von A nach B ist eine gerade Linie A B möglich.

2. Zusaz. Also liegen die Schenkel A C, A B eines geradlinigten Winkels C A B allemal in einer Ebene.

Denn

Denn durch A, B, C ist eine Ebene möglich (1 Zus.). Also liegen in derselben auch die geraden Linien A B, A C (1 Erkl.).

3. Zusaz. Eben daher liegen auch die drey Seiten A B, A C, C B eines geradlinigten Dreyeks A C B allemal in einer Ebene.

Anmerkung.

Euklides hat die Möglichkeit der Ebene weder erwiesen, noch postulirt. Daher beruft er sich Libr. XI. prop. 2. im Beweise des Sazes, daß die drey Seiten eines Dreyeks in einer Ebene liegen, bloß auf seine Definition des ebenen Winkels. Allein da die Realität nicht nur dieser Definition, sondern der ganzen Geometrie überhaupt, nicht eher erhellet, als bis erst die Möglichkeit der Ebene feststehet; so hätte Euklides billig leztere entweder erweisen, oder sie wenigstens, wie die Möglichkeit der geraden Linie, sogleich im Anfange der Geometrie postuliren sollen. Daß er dieses nicht gethan, ist also ein wahres Versehen, aber ein solches, das ihm niemand zur Last legen wird, der nicht vergißt, daß auch dieser große Mann noch immer ein Mensch blieb, dessen Aufmerksamkeit leicht etwas entgehen konnte, und auch in mehrern Fällen wirklich ent-

gangen ist. Herr Professor Hindenburg wundert sich, daß keiner von Euklids Commentatoren etwas hierüber angemerkt hat. In meinem noch ungedruckten Lehrbegrif der Geometrie ist dieses bereits geschehen, und zugleich die Möglichkeit der Ebene sofort im Anfange der Geometrie postuliret worden. Nur muß ich bedauren, daß ich seine Vermuthung, als ob ich in meiner Theorie der Parallellinien, vielleicht den Begrif des Parallelseyns so wohl, als den Begrif der Ebene weiter analysirt, und dadurch zugleich der Bedenklichkeit, die Möglichkeit der Ebene betreffend, mit abgeholfen hätte, nicht bestätigen kann. Denn beides konnte mir zur Erreichung meines Endzwecks nichts helfen, sondern diese muste auf einem ganz andern Wege gesucht werden. Indeßen habe ich auch über den Beweis von der Möglichkeit der Ebene mehr als einmal nachgedacht, aber ihn nicht auf eine befriedigende Art ausmitteln können. Mein Verfahren hiebey ist dieses:

Fig. 20. ich ziehe durch drey Punkte A, C, B ein Dreyek, nehme die Seite A B nach R und Q ohne Ende verlängert an, und stelle mir vor, daß diese nach beiden Seiten ohne Ende fortgehende gerade Linie R Q sich um einen in A B angenommenen Punkt F auf den Seiten des Dreyeks herumdrehete, so daß sie nach und nach in die Lagen H D I, K E L, M C N,

O G P

O G P und endlich in Q R zurück käme; so beschreibt die Linie Q R eine Fläche, deren Lage überall völlig bestimmt ist, und in welcher nicht nur jede Seite des Dreyeks A C B, sondern auch jede gerade Linie F D, F E, F C ꝛc., die man aus F nach irgend einem Punkte im Perimeter des Dreyeks A C B zieht, nach beiden Seiten ohne Ende verlängert ganz liegt. Daß nun die auf diese Art nach allen möglichen Seiten ohne Ende fortgehende Fläche eine ebene Fläche seyn müße, sehe ich zwar unmittelbar ganz anschaulich ein, allein wollte ich jemanden, der dieses leugnete, apodictisch widerlegen; so müßte ich noch beweisen, daß auch jede andere gerade Linie z. E. D G, die nicht durch F, sondern durch andere zween Punkte dieser Fläche z. E. D, G geht, ganz in derselben liege, d. h. ich müßte beweisen, daß z. E. die geraden Linien F E, F C nicht über, oder unter D G weggingen, sondern daß sie durch D G gingen und sie schnitten. Wie man aber hievon den Beweis führen könne, sehe ich gar nicht ein. Ich bin daher der Meinung, daß die Möglichkeit der Ebene sich nicht erweisen, sondern, wie die Möglichkeit der geraden Linien, bloß postuliren läßt. Denn wollte man einen Beweis davon geben; so müßte derselbe aus Principien hergeleitet werden, die vor aller ebenen Geometrie vorhergingen. Hier aber hat man noch

keine weitere Principien, als die bloßen beiden Begriffe der Linie und Fläche, mithin müste man die Möglichkeit der ebenen Fläche aus dem bloßen Begrif der geraden Linie folgern können. Allein da Linien und Flächen ganz disparate Begriffe sind; so ist eine solche Folgerung offenbar unmöglich. Postuliren läst sich dagegen die Möglichkeit der Ebene mit dem vollkommensten Rechte. Denn wir haben nicht nur von einer Ebene selbst eine ganz anschauende Vorstellung, sondern es ist uns auch eben so anschaulich, daß durch jede gerade Linie nach allen möglichen Gegenden des Raums, mithin auch durch jeden Punkt außer ihr, eine Ebene liegen muß. So anschaulich es ist, daß durch zween Punkte allemal eine gerade Linie geht, eben so anschaulich ist es auch, daß durch eine gerade Linie und einen Punkt außer ihr, oder durch drey Punkte, die nicht in einer geraden Linie liegen, allemal eine Ebene geht.

2. Forderungs-Saz.

Jede Ebene kann nach allen möglichen Seiten ohne Ende verlängert werden.

Anmerkung.

Auch diesen nöthigen Saz ist Euklides übergangen.

I. Grundſaz.

Durch eine gerade Linie A B und einen Punkt C, der außerhalb ihr liegt, iſt nicht mehr, als eine Ebene ohne Ende fort möglich, oder welches einerley iſt, durch A B und C iſt die Lage der Ebene nach allen möglichen Seiten ohne Ende gegeben. Fig. 10.

1. Zuſaz. Alſo geht auch durch drey Punkte A, B, C, die nicht in einer geraden Linie liegen, imgleichen durch die beiden Schenkel A C, A B eines geradlinigten Winkels C A B, wie auch durch die drey Seiten eines Dreyeks A C B ohne Ende fort nicht mehr, als eine Ebene.

2. Zuſaz. Wenn man daher von einer gegebenen Ebene nur drey Punkte, die nicht in einer geraden Linie liegen, in einer andere Ebene annimmt; ſo ſind beide Ebenen ohne Ende fort nur eine einzige (1 Z.)

3. Zuſaz. Alſo können zwo verſchiedene Ebenen keine andere, als eine gerade Linie gemein haben, d. h. die Linie, in welcher zwo Ebenen einander ſchneiden, muß allemal eine gerade ſeyn.

Denn hätten ſie eine Linie gemein, die nicht gerade wäre; ſo hätten ſie drey Punkte gemein, die nicht in einer geraden Linie lägen, alſo wären ſie

nicht

nicht zwo verschiedene Ebenen, sondern nur eine einzige (2 Zus.).

4. Zusaz. Aus eben dem Grunde können zwo verschiedene Ebenen auch nicht mehr, als eine einzige gerade Linie gemein haben, d. h. die Linie, in welcher sie sich schneiden, ist nur eine einzige gerade.

Anmerkung.

Den jezt angeführten unentbehrlichen Grundsaz vermißt man im Euklides gleichfalls.

2. Grundsaz.

Von einer geraden Linie C H kann nicht ein Theil C F in der Ebene, und der andere F H außerhalb der Ebene liegen. Fig. 11.

1. Zusaz. Wenn man daher eine gerade Linie C F nach H verlängert; so liegt die Verlängerung F H in eben derselben Ebene, in welcher C F liegt.

2. Zusaz. Also liegen zwo gerade Linien K L, G D, welche einander in I schneiden, allemal in einer Ebene. Fig. 12.

Denn K I, G I liegen in einer Ebene (1 Forb. 2. Z.), also liegen auch I L, I D in eben dieser Ebene (1 Z.).

An-

Anmerkung.

Dieſen Grundſaz führt Euklides lib. XI. prop. I. als einen Lehrſaz auf, und beweiſt ihn alſo: „Läge der eine Theil C F in der Ebene, und der Fig. 11. „andere F H außerhalb ihr; ſo lägen die Theile „C F, F H nicht in einer geraden Linie, welches „aber wider die Vorausſezzung iſt.„ All in dieſer Beweis iſt eine offenbare petitio principii; indem es eben bewieſen werden ſoll, daß zwo dergleichen Theile C F, F H, von denen der eine außerhalb der Ebene des andern liegt, nicht eine gerade Linie ſeyn können. Die Ausleger des Euklides ſuchten daher dieſen Beweis durch folgenden Schluß vollkommen zu machen: „Von einer „geraden Linie C F, die man durch F verlängert, „iſt ohne Ende fort nicht mehr, als eine Verlängerung möglich. Nun aber muß es in eben der „Ebene, in welcher C F liegt, allemal eine gerade „Linie F H geben, die der Linie C F gerade entgegengeſezt liegt, mithin die Verlängerung von „C F iſt. Alſo muß die Verlängerung von C F „mit ihr in eben derſelben Ebene liegen.„ Clavius ſahe ſehr wohl ein, daß hier wiederum erſt der Unterſaz des Schluſſes bewieſen werden muß, wenn der Beweis richtig ſeyn ſoll. Daher bemühete

mühete er sich, diesen also zu erweisen: „Man „richte auf C F die Perpendicular-Linie F G „auf, und in eben der verlängerten Ebene, in wel„cher C F, F G liegen, richte man auch auf F G „die Perpendicular-Linie F H auf; so sind die „Winkel C F G, H F G zusammen so groß, als „zween rechte. Da nun beide in einerley Ebene „liegen (vermöge der Construction); so sind F H, „C F einander gerade entgegengesezt (Eukl. 14. „S.), also F H die Verlängerung von C F, und „beide in einerley Ebene.„ Allein auch dieser Beweis ist eine wirkliche petitio principii. Denn er gründet sich auf den 14ten Saz des Euklides, daß zwo gerade Linien C F, F H, auf welche eine dritte F G dergestalt fällt, daß die Winkel C F G, H F G zusammen zween rechten gleich sind, einander gerade entgegengesezt sind; aber der Beweis dieses Sazes sezt schon voraus, daß die Verlängerung von C F in eben der Ebene liege, in welcher C F liegt. Hieraus erhellet zugleich, daß der Saz, von dem die Rede ist, nicht erst im Anfange der Stereometrie, sondern schon sogleich im Anfange der ebenen Geometrie zum Grunde gelegt werden muß, und er daher beym Euklides nicht an seinem rechten Orte stehet. Denn ohne diesen Saz ist man ja in der ganzen ebenen Geometrie nie-

niemals befugt, eine gerade Linie in der gegebenen Ebene zu verlängern, weil man ohne ihn nicht weiß, ob auch die Verlängerung in eben dieser Ebene liegt. Aber eben deshalb, weil dieser Saz schon der ganzen ebenen Geometrie vorgehen muß, mithin schon zu den einfachsten Principiis der Geometrie gehöret, glaube ich schwerlich, daß sich von demselben ein vollkommener Beweis geben laße. Anstatt ihn daher auf eine fehlerhafte Art zu beweisen, bleibt nichts übrig, als daß man ihn unter die Grundsäze rechne, und hiezu ist man völlig berechtigt, weil es unmittelbar in der anschauenden Vorstellung der Ebene liegt, daß jede gerade Linie derselben ohne Ende fort ganz in ihr liegen muß.

2. Erklärung.

Wenn von zwo Ebenen A M, L C, die in einer geraden Linie A C zusammenstoßen, die eine die Verlängerung der andern ist; so heißen sie **einander gerade entgegengesezt.** Ist dagegen von zwo Ebenen A M, A D, welche in einer geraden Linie A C zusammenstoßen, keine die Verlängerung der andern; so heißen sie **gegen einander geneigt.** Fig. 24.

3. Er-

3. Erklärung.

Die Neigung zwoer Ebenen A D, A M gegen einander heißt ein **Flächenwinkel**. Die beiden Ebenen A D, A M, welche ihn machen, heißen seine **ebenen Schenkel**, und die gerade Linie A C, in welcher beide zusammenstoßen, heißt seine **Scheitellinie**.

Zusaz. Da nun die Ebenen A D, A M nach allen Seiten ohne Ende verlängert werden können (2. Ford. S.), aber gleichwohl außer der Scheitellinie A C in keiner andern mehr zusammenstoßen können (1 Gr. 4 Zus.); so bleibt der körperliche Raum, der zwischen den ebenen Schenkeln A D, A M des Flächenwinkels D A M liegt, wenn diese nach den Seiten E A B, D C M, und endlich nach der Seite D E, M B ohne Ende verlängert werden, nach allen diesen drey Seiten unbegrenzt.

4. Erklärung.

Den unbegrenzten **körperlichen Raum**, der zwischen den ebenen Schenkeln A D, A M des Flächenwinkels D A M, wenn diese nach allen drey Seiten, E A B, D C M und D E, B M ohne Ende verlängert wer-

werden, enthalten ist, nenne ich den Raum des Flächenwinkels D A M.

1. Lehrsaz.

Wenn zween Flächenwinkel D A M, P F N gleich sind, so sind auch ihre Räume gleich. F. 24. 25.

Beweis. Denn man lege den Flächenwinkel D A M auf den Flächenwinkel P F N dergestalt, daß die Scheitellinie A C in die Scheitellinie F G und der ebene Schenkel A M in den ebenen Schenkel F N fällt; so kann der ebene Schenkel A D weder innerhalb den Flächenwinkel P F N in F Q fallen, weil sonst D A M kleiner, als P F N wäre, noch außerhalb denselben in F R, weil sonst D A M größer, als P F N wäre, mithin fällt er in den ebenen Schenkel F P, folglich decken sich die Räume der beiden gleichen Flächenwinkel, also sind sie gleich.

2. Lehrsaz.

Wenn der Flächenwinkel D A M größer ist, als der Flächenwinkel P F N; so ist auch der Raum des erstern größer, als der Raum des leztern.

Beweis. Denn man lege D A M auf P F N dergestalt, daß A C in F G, und A M in F N fällt; so kann A D nicht in F P fallen, weil sonst D A M = P F N wäre, und noch weniger in F Q inner-

halb den Winkel P F N, weil sonst D A M kleiner, als P F N wäre, mithin fällt A D außerhalb den Flächenwinkel P F N in F R. Also ist der Raum des größern Flächenwinkels D A M größer, als der Raum des kleinern P F N.

3. Lehrsaz.

Wenn die Räume zweener Flächenwinkel gleich sind; so sind die Flächenwinkel selbst gleich.

Beweis. Denn wäre der eine Flächenwinkel größer, als der andere; so wäre auch sein Raum größer, als der Raum des andern (2 Lehrs.).

4. Lehrsaz.

Wenn der Raum des Flächenwinkels D A M größer ist, als der Raum des Flächenwinkels Q F N; so ist auch der Flächenwinkel D A M größer, als der Flächenwinkel Q F N.

Beweis. Denn wären beide Flächenwinkel gleich; so wären auch ihre Räume gleich (1 Lehrs.), und wäre der Flächenwinkel D A M kleiner, als Q F N; so wäre auch der Raum des Flächenwinkels D A M kleiner, als der Raum des Flächenwinkels Q F N (2 Lehrs.). Da nun beides wider die Voraussezung ist; so muß der Flächenwinkel D A M größer seyn, als Q F N.

5. Er-

5. Erklärung.

Wenn zween Flächenwinkel D A M, D A V den ebenen Schenkel A D gemein haben, und die beiden andern A M, A V einander gerade entgegengesezt sind; so heißen sie **Nebenflächenwinkel**. Sind die beiden Nebenflächenwinkel D A M, D A V, welche die Ebene A D mit der Ebene L M macht, gleich groß, so heißen sie **rechte Flächenwinkel** und die Ebenen A D, L M **liegen auf einander senkrecht**. Sind dagegen die beiden Nebenflächenwinkel D A M, D A V ungleich; so heißen sie schiefe Flächenwinkel, und die Ebenen A D, L M liegen **gegen einander schief**. Fig. 24.

1. Zusaz. Also ist der ganze unbegrenzte Raum, der über einer nach allen möglichen Seiten ohne Ende fortgehenden Ebene L M liegt, der Raum zweener Nebenflächenwinkel D A M, D A V, sie mögen rechte oder schiefe seyn.

2. Zusaz. Also ist über jeder Ebene der Raum zweener Nebenflächenwinkel mit dem Raume zweener rechten Flächenwinkel, die über derselben Ebene liegen, einerley (1 30).

3. Zusaz. Also sind über einer Ebene je zween Nebenflächenwinkel zusammen so groß, als zween

rechte Flächenwinkel, die über derſelben Ebene liegen (3 Lehrſ.).

5. Lehrſaz.

Auf der Ebene Z N iſt in der geraden Linie G F nicht mehr, als eine ſenkrechte Ebene F P möglich. Fig. 25.

Beweis. Denn wenn F P auf Z N ſenkrecht ſteht; ſo ſind die Flächenwinkel P F N, P F X gleich (5 Erkl.). Nun ſezze man, es wäre außer F P noch eine andre ſenkrechte Ebene auf Z N möglich; ſo müſte ſie entweder innerhalb P F N in F Q, oder außerhalb in F R liegen. Allein da P F N = P F X iſt; ſo iſt Q F N < Q F X, und R F N > R F X; folglich iſt weder F Q noch F R auf Z N ſenkrecht (5 Erkl.), Alſo iſt auf Z N in G F nicht mehr, als eine ſenkrechte Ebene F P möglich.

6. Lehrſaz.

F. 24, 25. Alle rechte Flächenwinkel ſind einander gleich und ähnlich.

Beweis. Denn wenn zween Flächenwinkel D A M, P F N rechte ſind; ſo iſt die Ebene A D auf der Ebene L M, und die Ebene F P auf der Ebe-

ne

ne Z N senkrecht (5 Erkl.). Nun lege man den Flächenwinkel D A M auf den Flächenwinkel P F N dergestalt, daß die Scheitellinie A C in F G, und die Ebene A M in F N fällt; so fällt auch die Verlängerung A V in F X (1 Gr.), folglich muß die Ebene A D in F P fallen (5 Lehrs.), mithin decken sich die rechten Flächenwinkel D A M, P F N. Also sind sie gleich und ähnlich.

1. Zusaz. Also enthalten alle rechte Flächenwinkel gleiche Räume (1 Lehrs.).

2. Zusaz. Die Summe von ein Paar Nebenflächenwinkeln ist so groß, als die Summe von einem jeden andern Paar Nebenflächenwinkel.

Denn jede Summe ist so groß, als zween rechte Flächenwinkel (5 Erkl. 3 Z.).

3. Zusaz. Also ist die Summe aller Flächenwinkel, die um eine gerade Linie A C ringsum möglich sind, so groß als die Summe von zwey Paar Nebenflächenwinkeln D A M, D A V, und H C L, H C B, mithin so groß, als vier rechte Winkel (5 Erkl. 3 Z.). Fig. 24.

4. Zusaz. Da die zwey Paar Nebenflächenwinkel D A M, D A V, und H C L, H C B den ganzen möglichen Raum einschließen; so ist der ganze mögliche Raum ein Raum von vier rechten Flä-

chenwinkeln. Also ist der Raum eines rechten Flächenwinkels der vierte Theil vom ganzen möglichen Raum (1 Z.).

6. Erklärung.

Wenn zween Flächenwinkel D A M, H C L einerley Scheitellinie A C haben, und die ebenen Schenkel H C, C L des einen den ebenen Schenkeln A D, A M des andern gerade entgegengesetzt sind; so heißen sie verticale Flächenwinkel. Fig. 24.

7. Lehrsaz.

Zween verticale Flächenwinkel D A M, H C L sind einander gleich.

Beweis. Denn D A M + D A V = H C L + D A V (6 Lehrs. 2 Z.). Also ist D A M = H C L.

1. Jusaz. Wenn also die Ebene A D mit der Ebene L M zween rechte Flächenwinkel D A M, D A V macht; so macht auch ihre Verlängerung C H mit L M zween rechte Winkel H C L, H C B.

2. Jusaz. Wenn daher die Ebene A D auf der Ebene L M senkrecht ist; so ist auch ihre Verlängerung C H auf L M senkrecht.

8. Lehrsaz.

Wenn zwo Ebenen A C B und L M in irgend einem Punkte C zusammenstoßen: so stoßen sie allemal Fig. 24.

mal in einer geraden Linie zusammen, die durch C geht.

Beweis. Denn man verlängere die gerade Linie A C, nach F; so wird sie von jeder geraden Linie C I, die man in der Ebene L M durch C zieht, folglich von der Ebene L M selbst geschnitten, mithin liegt der Theil A C über, und der Theil C F unter der Ebene L M. Man ziehe daher B F; so muß, weil B über, und F unter der Ebene L M liegt, die Ebene L M die Linie B F in irgend einem Punkte G schneiden. Man ziehe daher die gerade Linie C G; so liegt dieselbe so wohl in der Ebene L M, als F C B (1 Erkl.). Nun aber liegt F C in der Ebene A C B (2 Gr. 1 Z.), und da auch B C in der Ebene A C B liegt; so sind F C B, A C B Theile einer einzigen Ebene (1 Gr. 1 Z.), folglich liegt C G auch in der Ebene A C B. Also stoßen die Ebenen A C B, L M in einer geraden Linie C G zusammen.

1. **Zusaz.** Wenn daher zwo Ebenen B A C, C D F von einer dritten L M dergestalt geschnitten werden, daß die Durchschnittslinien A C, D C im Punkte C zusammenstoßen; so stoßen sie in einer geraden Linie C H zusammen, die mit der Ebene L M in C zusammenstößt. Fig. 27.

2. **Zusaz.** Wenn also zwo Ebenen, die von einer

ner dritten geschnitten werden, entweder gar nicht, oder in einer solchen geraden Linie zusammenstoßen, die mit der schneidenden Ebene selbst niemals zusammenstößt; so sind die Durchschnittslinien parallel (13.).

3. Zusaz. Wenn zwo Ebenen B H C, C H F in einer geraden Linie H C zusammenstoßen, welche mit der Ebene L M in C zusammenstößt; so werden sie von dieser dritten Ebene L M dergestalt geschnitten, daß die Durchschnittslinien A C, D C im Punkte C zusammenstoßen.

Denn da jede der beiden Ebenen B H C, C H F mit der Ebene L M im Punkte C zusammenstößt; so stößt sie mit L M in einer geraden Linie zusammen, die durch C geht. Also stoßen die beiden Durchschnittslinien A C, D C in C zusammen.

4. Zusaz. Wenn daher zwo Ebenen, die in einer geraden Linie zusammenstoßen, von einer dritten dergestalt geschnitten werden, daß die beiden Durchschnittslinien parallel sind; so stößt die gerade Linie, in welcher sie zusammenstoßen, mit der schneidenden Ebene niemals zusammen, folglich auch mit keiner der beiden Durchschnittslinien, also ist sie mit beiden parallel.

9. Lehrsaz.

Wenn zwo Ebenen B A, B C, die in B I zusammenstoßen, von einer dritten L M unter parallelen

Linien

Linien E D, G F geſchnitten werden; ſo iſt der äuſſe-
re Flächenwinkel B F M gröſſer, als der entgegen- Fig. 28.
geſetzte innere B D M.

Beweis. Denn man verlängere die Ebene A B nach H (2 Forb. G.), und lege durch F G und den Punkt H die Ebene H F (1 Forb.), und verlängere ſie nach I (2 Forb.). Da nun die Durchſchnittslinien E D, F G parallel ſind; ſo ſtöſt weder die Linie B I, noch K H mit der Ebene L M zuſammen (8 Lehrſ. 4 B.), folglich liegen die Ebenen D B, F B, F H alle über L M, und die Verlängerungen E A, G C, F I alle unter L M, folglich beſteht der Raum des Flächenwinkels L G C aus dem Raum des Flächenwinkels A E L, dem unbegrenzten Raum zwiſchen den Ebenen A E, E F, F I und dem Raum des Flächenwinkels I F C, mithin iſt der Raum des Flächenwinkels L G C gröſſer, als der Raum des Flächenwinkels A E L, alſo iſt auch der Flächenwinkel L G C gröſſer, als der Flächenwinkel A E L (4 Lehrſ.). Nun aber iſt B F M = L G C, und B D M = A E L (7 Lehrſ.). Alſo iſt B F M > B D M.

10. Lehrſaz.

Wenn zwo Ebenen D B, F H von einer dritten L M unter parallelen Linien D E, F G dergeſtalt ge- Fig. 29.
ſchnitten werden, daß der äuſſere Flächenwinkel H F M gröſſer iſt, als der entgegengeſetzte innere B D M;

so stoßen sie nach der Seite B, H verlängert, nothwendig zusammen.

Beweis. Denn gesetzt, die Ebenen D B, F H stießen nach der Seite B, H hin niemals zusammen; so bliebe, weil die Durchschnittslinien D E, F G parallel sind (Voraussf.), der Raum zwischen den Ebenen D E F G, D B und F H ohne Ende fort unbegrenzt, folglich läge der ebene Schenkel F H ohne Ende fort innerhalb dem Flächenwinkel B D M, also wäre der Raum des Flächenwinkels H F M nur ein Theil vom Raum des Flächenwinkels B D M. Nun aber ist der Flächenwinkel H F M größer, als B D M (Voraussf.), folglich auch der Raum des Flächenwinkels H F M größer, als der Raum des Flächenwinkels B D M (2. Lehrs.). Also wäre der Theil größer, als das Ganze. Da nun dieses widersprechend ist; so stoßen die Ebenen D B, F H nothwendig nach der Seite B, H zusammen.

7. Erklärung.

Zwo Ebenen A B, C H, welche niemals zusam- Fig. 31.
menstoßen, wenn sie gleich nach allen möglichen Seiten verlängert werden, heißen **parallel**. Stoßen aber zwo Ebenen D B, F H verlängert nach einer

Seite

Seite B, H zusammen; so heißen sie nach dieser Seite hin convergent, und nach der entgegengesezten divergent. Fig. 29.

II. Lehrsaz.

Wenn zwo Ebenen A B, C H von einer dritten L M unter parallellen Linien D E, F G dergestalt geschnitten werden, daß entweder der äußere Flächenwinkel H F M dem entgegengesezten innern B D M gleich ist, oder die Wechselflächenwinkel B D M, C G L gleich sind, oder die beiden innern Flächenwinkel B D M und H F O zusammen so groß sind, als zween rechte; so sind in allen drey Fällen die Ebenen A B, C H parallel. Fig. 30.

Beweis. Denn man nehme erstlich an; daß H F M = B D M ist. Gesezt nun A B, C H stießen nach der Seite B, H zusammen; so wäre H F M > B D M (9 Lehrs.), und stießen sie nach der Seite A C zusammen, so wäre A E L > C G L (9 Lehrs.), folglich B D M > H F M (7 Lehrs.). Da nun beides der Voraussezzung widerspricht; so können A B, C H nach keiner Seite zusammenstoßen. Also sind sie parallel (7 Erk.).

Man

Man setze zweitens B D M = C G L. Da nun C G L = H F M ist (7 Lehrs.); so ist hier H F M = B D M, also sind A B, C H wieder parallel (n. 1.).

Man setze drittens B D M + H F O = 2 R: so ist H F M + H F O = B D M + H F O (5 E. 3 B), folglich H F M = B D M. Also sind A B, C H wieder parallel (n. 1.).

12. Lehrsaz.

Wenn zwo parallele Ebenen A B, C H von einer dritten L M geschnitten werden; so ist 1) der äussere Flächenwinkel H F M dem innern B D M gleich.

2) sind alsdenn die Wechselflächenwinkel B D M, C G L gleich.

3) sind die beiden innern Flächenwinkel B D M und H F O zusammen so groß, als zween rechte.

Beweis. Denn da die Ebenen A B, C H parallel sind (Vorausf.); so sind die Durchschnittslinien D E, F G parallel (8 Lehrs. 2 B.) Wäre nun H F M > B D M; so stießen A B, C H nach der Seite B, H zusammen (10 Lehrs.), und wäre H F M < B D M; so wäre C G L < A E L (7 Lehrs.),

folg-

folglich ſtießen A B, C H nach der Seite C, A zuſammen (10 Lehrſ.). Allein da A B, C H parallel ſind (Vorausſ.); ſo können ſie nach keiner Seite zuſammenſtoßen (7 Erkl.). Alſo iſt

1) H F M = B D M.

Da nun ferner H F M = C G L iſt (7 Lehrſ.); ſo iſt

2) B D M = C G L.

Da endlich H F M + H F O = 2 R (5 Erkl. 3 Z.), und H F M = B D M (n. 1.); ſo iſt

3) B D M + H F O = 2 R.

Zuſatz. Alſo iſt der Raum, der zwiſchen zwo parallelen Ebenen D B, F H ohne Ende fort enthalten iſt, gegen den Raum eines Flächenwinkels ein wahres Nichts, oder unendlich klein.

Denn da die Flächenwinkel H F M, B D M gleich ſind; ſo ſind auch ihre Räume gleich (1 Lehrſ.). Nun beſteht der Raum des Flächenwinkels B D M aus dem Raume des Flächenwinkels H F M, und dem Raume, der zwiſchen den parallelen Ebenen D B, F H ohne Ende fort liegt, folglich ſind dieſe beiden Räume zuſammen ſo groß, als der Raum des Flä-

chen-

chenwinkels H F M für sich ist. Also ist der Raum zwischen den parallelen Ebenen D B, F H gegen den Raum des Flächenwinkels H F M eine wahre Null, d. i. unendlich klein.

Anmerkung.

Aus den vier lezten Lehrsäzen laßen sich alle übrigen, die zur Lehre von den parallelen Ebenen gehören, ganz leicht herleiten, z. E.

Wenn eine Ebene auf zwo andern Ebenen zugleich senkrecht ist; so sind diese parallel.

Eine Ebene, welche eine von zwo parallelen Ebenen schneidet, schneidet auch die andere.

Durch einen gegebenen Punkt ist mit einer gegebenen Ebene nicht mehr, als eine parallele Ebene möglich.

Wenn zwo Ebenen mit einer dritten parallel sind; so sind sie unter einander selbst parallel.

Eine Ebene, die auf einer von zwo parallelen Ebenen senkrecht ist, ist auch auf der andern senkrecht.

u. s. w.

Ich überlaße daher die Beweise dieser Säze dem eigenen Nachdenken meiner Leser, um nicht die Zahl der Figuren zu stark anzuhäufen. Uebrigens könnten sich Anfänger die ganze vorgetragene Lehre von den parallelen Ebenen ganz sinnlich machen, wenn sie dünne Bretter dergestalt zusammen leimen laßen, wie es jeder Saz erfordert.

Nur noch eine Bemerkung will ich zum Schluß beifügen, weil sie viel Auffallendes hat, ob sie gleich apodictisch gewiß ist. Wie im Zusaze des 12ten Lehrsazes erwiesen ist, daß der unendliche Raum, der zwischen zwo parallelen Ebenen ohne Ende fortgeht, gegen den Raum eines Flächenwinkels unendlich klein ist; so läst sich auch leicht erweisen, daß gegen jenen Raum wiederum ein jedes unendliches Prisma, oder ein jeder Cylinder, der nach einer Seite ohne Ende fortgeht, unendlich klein, und dieser also gegen den Raum eines Flächenwinkels schon ein unendlich Kleines der zweyten Ordnung ist. Eben so aber läst sich auch ferner erweisen, daß jede körperliche Figur, so groß man sie immer annehmen mag, gegen einen Cylinder, der nach der einen Seite ohne Ende fortgeht, so dünne man diesen auch annehmen mag, wieder unendlich klein, mithin gegen den

den Raum zwiſchen zwo parallelen Ebenen ein unendlich Kleines der zwoten, und gegen den Raum eines Flächenwinkels ſchon ein unendlich Kleines der dritten Ordnung iſt. Man ſtelle ſich alſo das Weltgebäude ſo unermeßlich vor, als man wolle. Iſt es aber von allen Seiten begrenzt; ſo iſt ſein ganzer Raum gegen das feinſte Haarchen, das man ſich nach der einen Seite ohne Ende fortgehend denkt, dennoch ein völliges Nichts.

Johann Schultz

Darstellung

der vollkommenen

Evidenz und Schärfe

seiner

Theorie der Parallelen.

Königsberg,
bey Gottlieb Lebrecht Hartung,
1786.

Die entdeckte Theorie der Parallelen, welche ich in der Michaelismesse 1784 herausgab, hat zwar, so viel mir bekannt ist, nur das Glück gehabt, in zwo gelehrten Zeitungen, nämlich in der Allgemeinen Litteraturzeitung No. 54. den 5ten März 1785, und in dem 63sten Stücke der neuen Leipziger Gelehrten Zeitungen den 2ten Jun. 1785, angezeigt zu werden. Allein desto angenehmer ist es mir, in den mir unbekannten Recensenten ein Paar Kenner anzutreffen, die eben so scharf als bescheiden urtheilen. Vorzüglich schäzbar ist mir die Recension in der Allg. Litt. Zeitung, deren Verfasser meine Theorie am strengsten gesichtet, und mit der grössesten Scharfsinnigkeit und Mühe alles aufgeboten hat, was sich nur irgend wider ihre geometrische Evidenz und Schärfe erdenken läst. Denn hiedurch habe ich eben die beste Veranlassung erhalten, die Zweifel oder Schwierigkeiten, welche meine Theorie noch übrig zu lassen schien, aus dem Grunde zu heben, und die Bündigkeit und Evidenz der lezten in ihrem hellesten Lichte anschaulich zu machen.

Ich war zwar Anfangs Willens, die wider meine Schrift gemachten Einwürfe erst in der versprochnen Theorie der Lage zu beantworten. Allein da dringendere Geschäfte mir die nöthige Musse zur völligen Bearbeitung dieser Materie noch nicht verstatten wollen, und gleichwohl einige Geometer den von meinen Recensenten geäusserten Zweifeln ein solches Gewicht beizulegen scheinen, daß meine Theorie der Parallelen ihnen in der That noch nicht als vollkommen befriedigend vorkommt; so halte ich es für Pflicht, allen weitern Zweifeln zeitig ein Ende zu machen, und daher diese wenigen Blätter als ein Supplement zu meiner Theorie der Parallelen besonders herauszugeben.

(1) Meine Theorie der Parallelen beruhet lediglich auf meinem ersten neuen Lehrsazze: daß gleiche Winkel auch allemal gleiche Flächen haben, sie mögen liegen, wo man wolle. Denn aus diesem fliest sogleich der zweite Lehrsaz: daß ein grösserer Winkel auch allemal eine grössere Fläche habe, und aus diesem ist mein 7ter Lehrsaz (S. 74.), der den strittigen eilften Grundsaz des Euklides enthält: daß nämlich, wenn (fig. 2.) der äussere Winkel GIB grösser, als der innere CAB ist, die Schenkel AC, IG nach der Seite C, G hin zusammenstossen müssen, eine unmittelbare Folge, weil man sonst den widersprechenden Saz behaupten müste, daß die grössere Fläche GIB nur ein Theil der kleinern CAB wäre. So kurz und einfach ist meine ganze Theorie!

Meine

Meine Herren Recenſenten verkennen auch den Werth derſelben nicht. Sie geſtehen, daß meine Schrift für die Geometrie höchſt wichtig ſey, daß mein neues Princip, die Winkel durch ihre Flächen zu meſſen, recht eigentlich für die Vergleichung der Winkel gegen einander gehöre, und dieſe ungemein erleichtere; ja der Recenſent in der N. Leip. Gel. Zeit. erklärt ſelbſt meinen Beweis des ſtrittigen Grundſazzes, obgleich derſelbe ihn noch nicht vollkommen befriedigt, für einen überaus netten Beweis, den ſo lange und ſo viele mißlungene Verſuche kaum hoffen lieſſen. Sie geſtehen auch, daß meine zwo erſten Lehrſäzze, nebſt dem dritten und vierten, die unmittelbar aus ihnen folgen, durch wechſelſeitiges Auflegen und Anpaſſen der Winkel und ihrer Flächen, von mir ganz evident und ſtrenge erwieſen worden, ohne, daß das Unendliche der Schenkel oder der dazwiſchen liegenden Fläche dabey hinderlich fiele, und daß mein hierauf gegründeter neuer Beweis des 5ten Lehrſazzes: daß im Dreieck der äuſſere Winkel gröſſer ſey, als der entgegengeſezte innere, gleichfalls vollkommen ſtrenge ſey. Allein indem ich nun im Beweiſe des ſtreitigen Grundſazzes S. 74. meinen zweiten Lehrſaz anführe, und ſage; daß nach demſelben die Fläche des gröſſern Winkels GIB gröſſer ſey, als die Fläche des kleinern CAB; ſo beſtreiten ſie dieſe Folge, mithin die Allgemeinheit meines zweiten und alſo auch meines erſten Lehrſazzes, und meynen, daß erſterer gerade hier

über seine eigentlichen Grenzen angewendet werde, weil mein Beweis desselben eben für diesen Fall, wo der Schenkel IG des einen Winkels GIB innerhalb dem andern CAB liegt, nicht passe. Der Recensent in der N. Leipz. G. Z. druckt sich hierüber ganz kurz also aus: es wäre alles ganz gut und schön, wenn sich nur die von mir selbst berührte Schwierigkeit vollkommen wegräumen liesse, welche meinem ersten Lehrsazze, daß die Flächen aller gleichen Winkel gleich groß sind, entgegensteht, nämlich, wenn nur nicht der Augenschein lehrte, daß (fig. 6.) die Flächen der gleichen Winkel HKB, FLB um die zwischen beiden parallelen Schenkeln LF, KH unbegrenzte Ebene LFKH verschieden sind. Der Verfasser der Recension in der Allgemeinen Litt. Zeitung aber dringt in diese Schwierigkeit noch tiefer ein, und sucht dieselbe in ihrer ganzen Stärke darzustellen. „Die Beweise meiner vier ersten Lehrsäzze, sagt er, gründen sich lediglich darauf, daß man in Gedanken die Winkel und ihre Flächen auf einander legt, und so aus der Deckung oder Nichtdeckung der einen auf die Gleichheit oder Ungleichheit der andern schliest, die Gleichheit nämlich oder Ungleichheit dieser Dinge an und für sich folgert, aber dabey noch unentschieden läst, wie es sich damit in Rücksicht gewisser Lagen der Winkel und Winkelflächen gegen einander, verhält. Daraus, daß (fig. 3.) der grössere Winkel FAB eine grössere Fläche, als der kleinere CAB an sich betrachtet

trachtet hat, in so fern einer über den andern gebracht wird, folge noch nicht, ein grösserer Winkel GIB in einen kleinern CAB (wie in meinem 7ten Lehrsaz fig. 2.) gesezt, müsse den Schenkel AC des kleinern Winkels allemal schneiden, weil hier beide Winkel mit ihren Scheiteln A, I nicht nur ausser einander liegen, sondern auch, nach dem Sazze, als ausser einander liegend betrachtet werden müssen. Es bleibe also hier noch unentschieden, ob nicht vielleicht ein grösserer Winkel so in einen kleinern gesezt werden könne, daß des grössern Winkels Schenkel immer innerhalb dem Schenkel des kleinern fortlaufe, ohne sich jemals zu schneiden, zumal da man den grössern Winkel so wenig, als man will, von dem kleinern verschieden, beider Winkel Scheitel A, I aber so weit, als man will, von einander entfernt annehmen darf. Um die Schwierigkeit, die hier noch zurück sey, in ihrer ganzen Stärke sichtbar zu machen, sezze man (fig. 9.), der Schenkel af des Winkels faB schneide AC, *) so folge hieraus noch nicht, daß, wie der Saz verlangt, auch jeder andere Schenkel IG des jenem gleichen Winkels GIB die Linie AC schneiden müsse, denn obgleich die Differenz der gleichen Winkel faB, GIB Null ist; so sey doch die Differenz der ihnen

*) Statt der 2ten Figur, welche der Rec. hier gebraucht, habe ich lieber die 9te gewählt, um dadurch seinen Einwurf desto anschaulicher zu machen.

den zugehörigen Winkelflächen nicht Null, sondern faIG oder unendlich, das heist, für die Fläche des Winkels GIB gehe von der Fläche des gleichen Winkels faB der unendliche Streifen faIG ab, und so könne man nicht übersehen, ob nicht dadurch der Winkelfläche faB so viel abgehen könne, daß die Fläche GIB nur ein Theil von der Fläche CAB seyn könne, so daß IG und AC, beide ohne Ende verlängert, einander nicht schneiden. Einwenden: des grössern Winkels GIB grössere Fläche könne doch nicht ein Theil der kleinern Fläche des kleinern CAB seyn, und folglich müsse IG die AC nothwendig schneiden, heisse also stillschweigend annehmen, was man erst erweisen soll: der grössere Winkel habe auch in jeder Lage der Winkel gegen einander eine grössere Fläche. Mein zweiter Lehrsaz könne nicht hieher gezogen werden, er sey nur für die Vergleichung der Winkel an sich erwiesen, in sofern man nämlich die Winkel und ihre Flächen über einander bringt, nicht in Absicht auf ihre verschiedene Lage gegen einander. Den Winkel GIB auf den Winkel faB legen, sey eben so viel, als der Winkelfläche GIB den unendlichen Streifen faIG zusezzen, um welchen sie von der Winkelfläche des übrigens gleichgrossen Winkels faB unterschieden ist. Gleichgrosse Winkel nämlich bleiben zwar dieselben, wo sie auch immer auf der unbegrenzten Ebene gegen einander liegen; nicht so ihre Winkelflächen, die eine Differenz haben können, welche hindert,

solche

solche ohne weitern Beweis für gleich anzunehmen.„

Es ist nicht zu leugnen, daß dieser Einwurf so viel Schein hat, daß dem, der hiebey stehen bleibt, die Bündigkeit meiner Theorie sehr leicht verdächtig werden kann. Die ganze Stärke desselben beruhet aber wieder lediglich auf der vorigen Schwierigkeit, die der Allgemeinheit meines ersten Lehrsazzes: gleiche Winkel haben gleiche Flächen, dadurch entgegen zu stehen scheint, daß fig. 9. die Fläche des Winkels faB von der Fläche des gleichen Winkels GIB nicht um Null, sondern um den unendlichen Streifen faIG unterschieden sey. Wäre nämlich die Allgemeinheit meines ersten Lehrsazzes in der That zweifelhaft, liesse mein Beweis desselben irgend einen gegründeten Verdacht zurück, daß die Fläche des Winkels GIB kleiner sey, als die Fläche des gleichen Winkels faB; so bliebe auch allerdings der Zweifel übrig, ob nicht, wenn der Winkel GIB nur um ein weniges grösser, als der Winkel CAB, und der Scheitel I vom Scheitel A sehr weit entfernt gesezt wird, die Winkelfläche GIB kleiner werden könnte, als die Winkelfläche CAB, und so wäre es um die Bündigkeit meines Beweises für den streitigen Grundsaz allerdings geschehen. Steht aber die Allgemeinheit meines ersten Lehrsazzes fest; so fällt der Zweifel, ob nicht vielleicht der Fläche des grössern Winkels GIB fig. 9. durch den unendlichen Streifen FAIG so viel abgehen könne, daß sie dadurch kleiner, als

die Fläche des kleinern Winkels CAB, werden, mithin innerhalb der leztern Raum haben könnte, ohne daß IG den Schenkel AC jemals schneiden dürfte, gänzlich weg. Denn wenn man den Winkel FAB = GIB macht; so ist offenbar die Fläche des Winkels FAB grösser, als die Fläche des Winkels CAB. Sind also die Flächen der gleichen Winkel FAB, GIB gleich groß; so muß auch die Winkelfläche GIB grösser seyn, als die Winkelfläche CAB. In diesem Falle steht also meine Theorie der Parallelen so fest, daß gar kein vernünftiger Einwurf dagegen mehr möglich bleibt.

So ist dann klar, daß bey der Frage über die Evidenz und Bündigkeit meiner Theorie der Parallelen es lediglich darauf ankommt, ob mein erster Lehrsaz von der Gleichheit der Flächen gleicher Winkel völlige Allgemeinheit habe, die Lage der gleichen Winkel gegen einander sey, welche man wolle? Hiebey aber entstehen nun folgende drey Fragen:

1) ist dieser Saz, in seiner völligen Allgemeinheit genommen, wirklich wahr?
2) wenn er wahr ist; läst er sich auch auf irgend eine Art demonstrativ darthun?
3) ist der Beweis, den ich von demselben gegeben habe, demonstrativ, oder nicht?

Mein Recensent in der N. Leipz. G. Z. scheint von diesen drey Fragen nicht nur die lezte, sondern auch sogar die beiden ersten zu verneinen,

wenn

wenn er sogleich nach der oben erwähnten Stelle hinzusezt: „Der Verfasser beruhigt uns über dies„sen Widerspruch, wenn er erinnert, es sey dieso „Fläche LFHK (fig. 6.) als eine wahre Null „anzusehen, und der Saz, auf welchen diese Be„hauptung führe, daß der Theil dem Ganzen „gleich sey, habe seine völlige Richtigkeit, wenn „man annimmt, sein Nebentheil sey gegen ihn „ein völliges Nichts oder unendlich klein. Allein „ein so paradoxer Grundsaz wird hoffentlich kei„nen Beifall finden.„ Denn verdient selbst der ganz identische Grundsaz: wenn $B = o$ ist; so ist $A = A + B$, keinen Beifall; so würde der Saz: daß die Fläche HKB = HKB + LFHK sey, gewiß um so weniger des Beifalls würdig seyn, da hier offenbar der Nebentheil LFHK unendlich groß ist. Indessen kann ich mich unmöglich überreden, daß jener Ausruf meines Recensenten seine wahre Meinung seyn sollte. Denn sonst wäre ich, alles übrige bey Seite gesezt, wohl sehr begierig zu sehen, wie er eine solche nicht bloß paradoxe, sondern allgemein verworfene Behauptung mit der Analysis des Unendlichen vereinigen wollte, die ja bekantlich lehrt, daß $\infty + a = \infty$, $\infty^2 + \infty = \infty^2$ und überhaupt $\infty^n + \infty^{n-1} = \infty^n$ d. i. daß der Theil ∞ dem Ganzen $\infty + a$, und der Theil ∞^n dem Ganzen $\infty^n + \infty^{n-1}$ gleich sey.

Mein Recensent in der A. L. Z. sieht dieses auch sehr wohl ein. Er bejaht von den obigen Fragen die beiden ersten ohne allen Rückhalt, nur

die letzte verneint er, und auch dieses nur mit einem sehr bescheidenen Vielleicht. Nach seiner oben angeführten ausführlichen Einwendung, fährt er also fort: „Schultz hat diese Schwierigkeit sehr „wohl eingesehen, und daher von ihr (S. 62. 78. „und 90.) verschiedentlich gehandelt. Am letztern Orte hat er vornemlich darzuthun gesucht, „der unendliche Streifen falG (fig. 9.) sey gegen die unendliche Winkelfläche GlB ein völliges Nichts. Freylich hat das seine vollkommene Richtigkeit, aber der Beweis hat „nach dem, was hier ist beygebracht worden, „keine geometrische Evidenz.„ Gegen das Ende seiner Anzeige erklärt er sich auch über die zweite Frage noch bestimmter: „daß übrigens, sagt er, „die Behauptung: der unendliche Streifen zwischen den parallelen Linien sey gegen den Winkel, „an welchem er liegt, ein völliges Nichts, vollkommen wahr sey, ist keinem Zweifel unterworfen, weil man aus andern Gründen darthun kann, der Winkel sey ein Unendliches einer „höhern Ordnung, als der Streifen ist, nur „an dem Ort, wo der Saz, nach Schultzens „Systeme zuerst vorkommen muß, ist er nicht „evident bewiesen.„ Der Verf. dieser Anzeige gesteht also, daß die Schwierigkeit, welche der Allgemeinheit meines ersten Lehrsazzes entgegen zu stehen scheint, in der That nichtig ist, und daß lezterer, zwar nicht an dem Orte, wo er nach meinem System zuerst vorkommen muß, nämlich

im

im Anfange der Elementar-Geometrie, aber dennoch aus der Lehre vom Unendlichen sich in seiner völligen Allgemeinheit wirklich erweisen lasse. Da er die Art, wie dieses geschehen kann, nicht angezeigt hat; so will ich, um diese Materie auf einmal ganz vollständig abzuhandeln, auch diesen Beweis hier beifügen. Er läst sich am leichtesten folgendermaassen führen. Man trage auf den unendlichen Schenkel MB des Winkels CMB (fig. 6.), den Theil ML in K u. s. w. so vielmal auf, als man will; und ziehe durch die Theilungspunkte L, K u. s. w. mit MC die Parallellinien LF, KH u. s. w.; so sind die Winkel x, y, z u. s. w. alle einander gleich. Nun ist ferner klar, daß die unendlichen parallelen Streifen CMLF, LF.KH u. s. w., die auf diese Art entstehen, insgesammt einander decken, und also alle gleich groß sind. Mithin ist der unendliche Streifen CMLF in der unendlichen Winkelfläche CMB eben so vielmal enthalten, als die Linie ML in dem unendlichen Schenkel MB enthalten ist. Allein ML ist in MB unendlich viele male enthalten, folglich ist $MB = \infty . ML$, mithin ist auch der Streifen CMLF in der Winkelfläche CMB unendlich viele male enthalten, folglich ist die Fläche $CMB = \infty . CMLF$. Da nun die Winkelfläche $FLB = CMB - CMLF$ ist; so ist

$$FLB = \infty . CMLF - CMLF$$
$$= (\infty - 1) CMLF.$$

Nun

Nun aber ist $\infty - 1 = \infty$, folglich ist die Winkelfläche $FLB = \infty . CMLF = CMB$. Also sind die Flächen FLB und CMB der gleichen Winkel y und x gleichgroß, und mithin ist der unendliche Streifen CMLF, um den sie unterschieden sind, gegen sie selbst ein völliges Nichts, d. i. von der Art, daß er die Winkelflächen selbst weder vergrössert, noch verringert, man mag ihn zu denselben hinzusezzen, oder davon wegnehmen, und zwar ist dieses ganz allgemein richtig, der Scheitel L mag vom Scheitel M so weit entfernt liegen, als man will.

So leicht läßt sich demnach die völlige Allgemeinheit meines ersten Lehrsazzes aus den ersten Grundsäzzen der Lehre des Unendlichen auſſer allen Zweifel sezzen, und eben hiedurch ist also auch, vermöge des vorhin Erwiesenen, die Richtigkeit meines Beweises für den eilften Euklideischen Grundsaz bereits auſſer allen Zweifel gesezt. Es ist daher sonderbar, daß man auch selbst in der Analysis des Unendlichen diesen leichten Weg, gedachten Grundsaz darzuthun, nicht wahrgenommen hat. Denn bis jezt ist man so wenig in der Analysis des Unendlichen, als in der Elementargeometrie im Stande gewesen, einen Beweis desselben auszumitteln. Der Grund dieses seltsamen Phänomens in der mathematischen Geschichte liegt wohl ohne Zweifel darin, daß man sich in der Geometrie fast bloß mit der Analysis des unendlich Kleinen beschäftiget, die Vergleichung unend-

endlich grosser Grössen dagegen beinahe gänzlich aus der Acht gelassen hat. Ohne zuvor mit der Vergleichung der Winkelflächen den Anfang zu machen, läst sich auch hierin gar nichts Erhebliches ausrichten. Daher wissen die Analysten mit den Ordnungen des Unendlichgrossen sehr wenig zu machen. Sie gebrauchen die Ausdrücke ∞, ∞^2, ∞^3, $\infty^{\frac{1}{2}}$, $\infty^{\frac{2}{3}}$ u. s. w. blos zum Behuf des analytischen Calculs, ohne sich von ihnen weiter einen Begriff machen zu können, was sie darunter eigentlich denken sollen. Die Analysis des Unendlichgrossen, dieser erhabenste Theil der ganzen Mathematik, ist also ein Feld, das zur Zeit noch ganz unbearbeitet und öde liegt. Zu diesem neuen Felde ist aber nunmehr der Weg durch meine Theorie der Parallelen hinlänglich eröfnet, und bald, hoffe ich, wird nun der Analyst das Unendlichgrosse mit eben der Leichtigkeit messen, mit welcher er bisher das Endliche gemessen hat, und mit den Ausdrücken ∞, ∞^2, ∞^3, $\infty^{\frac{m}{n}}$, $\log. \infty^n$ u. s. w. eben so deutliche und evidente Begriffe verknüpfen, als er bisher mit den Ausdrücken a^n, $a^{\frac{n}{m}}$, $\log. a^n$ u. s. w. verknüpft hat. So angenehm es mir daher auch ist, den so lange gesuchten Beweis des streitigen Euklideischen Grundsazzes endlich ausgemittelt zu haben; so würde mir doch derselbe, wenn er aus den gewöhnlichen Principien der Elementargeometrie hergeleitet wäre, nicht

nicht halb so werth seyn, als er mir dadurch ist, daß ihm die Entdeckung des so fruchtbaren Princips von der Vergleichung der Winkelflächen zum Grunde liegt.

Nunmehr ist also völlig einleuchtend, was man an meiner Theorie der Parallelen noch eigentlich zu vermissen glaubt. Es ist nämlich gar nicht die Frage: ob mein Beweis des streitigen Euklidischen Grundsazzes richtig ist, d. i. ob mein erster Lehrsaz: gleiche Winkel haben gleiche Flächen, sich in seiner völligen Allgemeinheit darthun lasse, und daher der unendliche Streifen zwischen zwo Parallellinien, gegen die Fläche der Winkel, die an ihm liegen, in der That eine wahre Null sey. Von allem diesen ist die ungezweifelte Gewißheit für den Analysten bereits unwidersprechlich dargethan. Die eigentliche Frage, die hier zu entscheiden bleibt, ist bloß diese: ob mein erster Lehrsaz, in seiner völligen Allgemeinheit genommen, sich auch schon im Anfange der Elementar-Geometrie, mit eben der Schärfe und Evidenz, als jeder Lehrsaz des Euklides erweisen lasse? Denn die Theorie der Parallellinien gehört sogleich in den Anfang der Elementar-Geometrie. Daher verlangt man, daß jeder Saz, auf welchem sie beruhet, sofort im Anfange der Geometrie mit Euklidischer Schärfe bewiesen werde. Obgleich also mein erster Lehrsaz, auf welchem sie beruht, sich aus der Lehre vom Unendlichen, wie ich gezeigt habe, strenge erweisen läßt; so würde doch die-

dieſer Beweis gegen die andern Euklideiſchen Beweiſe zu abſtechend ſeyn, und meine Theorie der Parallelen würde alſo, ungeachtet ihrer völligen Gewißheit, dem eigentlichen Wunſche der Geometer doch nicht völlig entſprechen. Es wird alſo darauf ankommen, ob mein erſter Lehrſaz ſeine Stelle ſofort im Anfange der Elementar-Geometrie mit eben dem Rechte, als jeder andere Saz des Euklides, behaupten kann, und dieſes hoffe ich nun ſo helle darzuthun, als es nur irgend der ſtrengſte Geometer wünſchen kann.

Der Beweis, den ich von dem Sazze, daß die Flächen gleicher Winkel CAB, cab (fig. 3. 4.), wo dieſe auch irgend liegen mögen, allemal gleich ſind, in meiner Schrift S. 68. gegeben habe, beſteht ganz kurz darin, weil die beiden gleichen Winkel, folglich auch ihre Schenkel ac, AC, und ab, AB, alſo auch die zwiſchen ihnen enthaltne ebene Flächen ohne Ende fort einander decken.

Bey einem Beweiſe, der ſo klar und einfach iſt, ſollte man kaum vermuthen, daß jemand ſeine Bündigkeit im Ernſte bezweifeln könnte. Nun findet ſich hier zwar der beſondere Umſtand, daß zween gleiche Winkel, x und y, wie fig. 6., eine ſolche Lage gegen einander haben können, daß gleichwohl die Fläche FLB des einen nur einen Theil von der Fläche CMB des andern einnimmt, mithin kleiner, als die leztere zu ſeyn ſcheint. Allein da auch hier die Winkel x und y wegen ihrer

Gleichheit dennoch nothwendig einander decken, mithin auch ihre Flächen CMB, FLB auf einander passen müssen; so zeigte ich zugleich in meiner Abhandlung S. 90 — 94, wie eben hieraus apodictisch folge, daß der unendliche Streifen CMLF, gegen die Winkelflächen CMB, FLB selbst eine wahre Null ist, d. i. sie weder vergrössert, noch vermindert, und wie man also eben hiedurch schon im Anfange der Geometrie mit der grössesten Evidenz auf die Realität der verschiednen Ordnungen des Unendlichen geführet werde. Indessen sehe ich doch aus dem Urtheile meiner Recensenten, daß meine Vorstellung noch nicht die vollkommene Deutlichkeit haben müsse, die ich ihr gegeben zu haben glaubte. Anstatt sich durch dieselbe befriedigt zu sehen, betrachten sie vielmehr den angezeigten Fall als eine Schwierigkeit, welche die Allgemeinheit meines Beweises entkräfte. Hier eben, meynen sie, lehre der Augenschein, daß zween Winkel gleich seyn, und daher einander decken können, ohne daß deshalb ihre Flächen einander decken dürfen. Mein Beweis, sagt der Recensent in der A. L. Z., folgere dadurch, daß man die gleichen Winkel und ihre Flächen in Gedanken auf einander legt, aus dem Decken derselben ihre Gleichheit zwar ganz evident, ohne daß das Unendliche der Schenkel oder der dazwischen liegenden Fläche dabey hinderlich fiele, aber er folgere sie nur an und für sich, und lasse dabey noch unentschieden, wie es sich damit in Rücksicht

ſicht gewiſſer Lagen der Winkel und Winkelflächen gegen einander verhält.

Allein daß mein gegebner Beweis auf alle gleiche Winkel, auch in jeder beſondern Lage, welche ſie gegen einander haben mögen, paſſend iſt, läßt ſich ſchon leicht auf folgende Art erkennen. Man ſezze, der Winkel cab (fig. 4.) ſey den gleichen Winkeln CMB, FLB (fig. 6.) gleich. Da nun hier keine beſondere Lage des Winkels cab gegen die Winkel CMB, FLB vorhanden iſt, die der unmittelbaren Vergleichung ihrer Flächen eine Schwierigkeit in den Weg legen könnte; ſo muß, nach dem eignen Geſtändniß des Hrn. Recenſenten, die Winkelfläche cab die Fläche des gleichen Winkels CMB decken, alſo iſt ſie ihr gleich. Aus eben demſelben Grunde aber muß die Winkelfläche cab auch die Fläche des gleichen Winkels FLB decken, folglich iſt ſie auch dieſer gleich. Da alſo die Winkelflächen CMB, FLB der dritten cab gleich ſind; ſo ſind ſie einander ſelbſt gleich. Dieſe leichte Fortſezzung meines S. 68. gegebenen Beweiſes zeigt alſo ſchon klar, daß der Schluß von der Gleichheit der Winkel auf die Gleichheit ihrer Flächen ganz allgemein gültig iſt, wie auch die Lage der Winkel gegen einander irgend beſchaffen ſeyn mag.

Um aber die vermeinte Schwierigkeit aus dem Grunde zu heben, will ich noch das Mißverſtändniß aufdecken, das derſelben eigentlich zum Grunde liegt. Hiezu giebt mir der Recen-

sent in der A. L. Z. die beste Veranlassung. Um es ganz augenscheinlich zu zeigen, daß (fig. 6.) die Winkelflächen CMB, FLB, wegen der Gleichheit der Winkel, einander nothwendig decken müßten, sagte ich (S. 62.): wer dieses leugnen wollte, der müste annehmen, daß die Fläche des Winkels FLB sich mittlerweile, da man ihn auf den Winkel CMB legt, vergrössert hätte, welches offenbar ungereimt ist. Hierauf erwidert er nun: „wenn ich dieses ungereimt nennte, so hätte ich nicht bedacht, was der Augenschein jedem nachweist, der die Figur auch nur obenhin betrachtet, indem die Winkelfläche CMB = FLB + CMLF ist. (Hier ist es dem liebenswürdigen Mann wohl entfallen, daß meine angeführten Worte ja eben die Antwort auf das waren, was ich unmittelbar vorher selbst eingewandt hatte, nämlich, daß die Gleichheit der Flächen FLB, CMB wider den Augenschein zu streiten schienen.) Den Winkel FLB, fährt er fort, auf den Winkel CMB legen, heisse ja wohl, den Winkel FLB mit seinem Scheitel L längst BL über M schieben, und dadurch die Fläche CMLF zur Fläche FLB mit herüber nehmen. Ob nun FLB durch den Zusaz des unendlichen Streifen CMLF wirklich vergrössert werde? Diese Frage werde gewiß jeder Anfänger, selbst der beste Kopf, beim ersten Eintritt in die Geometrie bejahen, so lange ihm nicht das Gegentheil auf die bündigste Art klar und deutlich erwiesen wird.„

Ich

Ich will nicht in Abrede seyn, daß der Anfänger und vielleicht auch der beste Kopf, beim ersten Anblick der Figur dieses wirklich bejahen könne, aber das ist auch gewiß, daß, so lange er dieses thut, er noch nicht denkt, sondern blos sieht, eben so, wie derjenige, welcher bejahen wollte, daß der Mond in der Höhe wirklich kleiner werde, als er beim Aufgange war. Bey der Beurtheilung der Grösse, die ein blosser Verstandesbegriff ist, hat das Auge keine Stimme. Nach meinen Begriffen ist das Decken der Winkel und das Decken ihrer Flächen einerley, und die Vergrösserung der Fläche eines Winkels, so lange der Winkel selbst derselbe bleibt, ein widersprechender Begriff. Denn durch die unendlichen Schenkel LB, LF und durch ihre Neigung gegen einander ist die ganze Fläche des Winkels FLB ohne Ende fort gegeben, d. i. es ist zwischen ihnen nur die einzige unendliche Fläche FLB, und keine andere, möglich. Nun heist den Winkel FLB an einen andern Ort legen nichts anders, als dieselben unveränderten Schenkel LB, LF mit eben der unveränderten Neigung, die sie am ersten Orte haben, in Gedanken an einen andern Ort legen, also nichts anders, als eben die unveränderte Fläche FLB, die der Winkel am ersten Orte hat, an diesen andern Ort legen. Man lege daher den Winkel FLB, wohin man will; so wird auch seine Fläche FLB unverändert mit dahin gelegt, und sie bleibt also an jedem

neuen Orte des Winkels immer dieſelbe. Läſt ſich demnach der Winkel FLB in Gedanken dergeſtalt auf einen andern gleichen Winkel z. B. CMB legen, daß ſeine unendlichen Schenkel LF, LB die unendlichen Schenkel MC, MB des andern Winkels decken; ſo muß auch unwiderſprechlich ſeine unveränderte Fläche FLB die Fläche CMB decken. Allein wenn ich in Gedanken den Winkel FLB auf der Linie BM ſo fortſchiebe, daß der Scheitel L in M, und der Schenkel LF in MC zu liegen kommt; ſo liegt, wenn die Winkel FLB, CMB gleich ſind, jezt der Schenkel LF in MC, und LB in MB. Da nun die Schenkel LF, LB auch in dieſer neuen Lage MC, MB, weil ſie unendlich ſind, eben ſo, wie die Schenkel MC, MB ohne Ende fortgehen; ſo müſſen ſich LF, MC, und LB, MB nothwendig decken. Alſo muß auch in dieſer Lage die Fläche FLB die Fläche CMB nothwendig decken, d. i. ihr gleich ſeyn. Hier iſt alſo klar, daß der ſcheinbare Unterſchied der beyden Winkelflächen FLB und CMB eine bloſſe Illuſion iſt. Der Schenkel LB, der von L an nach der Seite B ohne Ende fortging, geht, wenn man ihn in M anfangen läſt, von M an nach der Seite B ebenfalls ohne Ende fort, mithin paſt er eben ſowohl auf MB, als auf LB, und eben ſo geht die Fläche FLB, die erſt von L an zwiſchen LF und LB ohne Ende fortging, jezt, da L in M, LF in MC, und LB in MB liegt, zwiſchen MC und MB ohne Ende fort, alſo paſt ſie

eben

eben sowohl auf CMB, als auf FLB. Will man sich dieses ganz sinnlich machen; so darf man sich nur eine feste z. B. metallene Platte vorstellen, die ohne Ende fort auf den Winkel FLB genau paßte. Nun lege man diese unveränderliche unendliche Platte auf irgend einen Winkel, der dem Winkel FLB gleich ist, z. B. auf CMB; so passen allemal ihre Ränder LF, LB auf die Schenkel MC, MB, und die Platte selbst, die auf die Fläche FLB paßte, past daher auch auf die Fläche CMB. Wollte dieses jemand leugnen, und einwenden: durch das Fortschieben von L bis M sey der Platte Rand LB um ML, und sie selbst um die Fläche CMLF vergrössert; so frage ich: wo ist denn diese Vergrösserung geschehen? Da die Platte FLB fest ist; so bleibt sie, so weit man sie von ihrem Scheitel L an in Gedanken verfolgen mag, auch in dieser neuen Lage ohne Ende fort dieselbe. Sollte also durch ihr Fortschieben auf den Winkel CMB ihr Rand LB um ML und sie selbst um den Streifen CMLF vermehrt worden seyn; so müste dieses am Ende ihres Randes LB nach derjenigen Seite B hin, wo er kein Ende hat, geschehen seyn, wo der Widerspruch klar ist. Um sich hievon auf die evidenteste Weise noch näher zu überzeugen, sezze man LK = LM, und stelle sich die Linie LK auf den unendlichen Rand LB von K aus weiter in Punkten, die nach der Reihe N, O, P ꝛc. heissen mögen, so vielmal aufgetragen vor, als man will, und durch die Punkte

N, O, P u. ſ. w. ſtelle man ſich zugleich lauter Parallelen NR, OS, PV u. ſ. w. mit LF vor. Liegt nun der Platte Scheitel L in M; ſo liegt ihres Randes erſter Theil LK jezt in ML, der zweite Theil KN in LK, der dritte NO in KN, der vierte OP in NO u. ſ. w. ohne Ende fort, und von ihrer Fläche liegt jezt der erſte Streifen FLKH in CMLF, der zweite HKNR in FLKH, der dritte RNOS in HKNR, der vierte SOPV in RNOS u. ſ. w. ohne Ende fort. Soll alſo durch das Hinſchieben der Winkelplatte FLB auf den Winkel CMB ihr Rand LB um ML und ihre Fläche FLB um den Streifen CMLF vermehrt werden; ſo iſt klar, was ſchon vorhin gezeigt worden, daß dieſe Vermehrung nicht eher, als am Ende des Randes oder Schenkels LB, nach der Seite B hin, wo er kein Ende hat, geſchehen müſte. Hier iſt es alſo unwiderſprechlich klar, daß die Vergröſſerung der Fläche eines Winkels, ſo lange der Winkel ſelbſt nicht vergröſſert wird, ein widerſprechender Begriff, und der unendliche Streifen CMLF in der Winkelfläche CMB nur eben ſo vielmal enthalten iſt, als in der Winkelfläche FLB. Einen Streifen, wie CMLF, ſo unendlich groß er auch an ſich iſt, und ſo groß ſeine Baſis ML immer ſeyn mag, zur Winkelfläche FLB hinzudenken, heiſt alſo im ganz eigentlichen Verſtande eben ſo viel, als zur Winkelfläche FLB Nichts hinzudenken, ſondern wenn ich mir die Winkelflächen FLB und CMB denke; ſo denke

ich

ich ein Paar Flächen, die sowohl in Ansehung ihrer Qualität, d. i. ihrer Gestalt, als ihrer Quantität ganz einerley sind, und sich bloß durch die äussere Lage ihrer Scheitel L, M und ihrer Schenkel unterscheiden, mithin sich völlig substituiren lassen. Es ist demnach sowohl für eine unendliche gerade Linie KB, als für eine unendliche Winkelfläche HKB einerley, wo ihr Anfangspunkt K in der Ebene angenommen wird, ob in K, oder in L, oder in M, und eine Platte, welche auf die unendliche Winkelfläche HKB paßt, paßt auch eben sowohl auf die Winkelflächen FLB und CMB, wenn die Winkel x, y, z gleichgroß sind. Uebrigens will ich an denjenigen Anfänger, welcher etwa zweifelhaft wäre, ob nicht die unendliche Linie MB gröſſer seyn könnte, als die unendliche Linie LB, nur noch die Frage thun: welcher Weg ist weiter, wenn ich von L aus nach der Richtung B ohne Ende fortgehe, oder wenn ich diesen Gang von M aus antrete?

Ich habe mich in diese ausführliche Zergliederung bloß zu dem Zwecke eingelassen, um der Illusion in dem vermeinten Augenschein der Ungleichheit der Winkelflächen FLB, CMB bis zu ihrer ersten Quelle nachzuspühren. Zum Beweise, daß diese Flächen wirklich gleich sind, ist dieser Weg gar nicht nöthig, sondern dieser kann auf eine weit leichtere und hellere Art geführt werden. Ich werde daher jezt drey verschiedene Methoden hiezu anzeigen, von denen jede so beschaffen ist, daß sie

allen weitern Einwürfen wider meine Theorie der Parallelen auf einmal ein Ende macht.

Die erste Methode besteht in folgenden Säzzen:

Lehrsaz a.

Alle gerade Linien IM, IG, IK, IB, ID, IL (fig. 12.), welche aus eben demselben Punkt I nach einer Seite M, G, K, B, D, L ohne Ende fortgehen, sind einander gleich.

Beweis. Denn man lege (fig. 12.) die Linie IM auf IG so, daß ausser dem gemeinschaftlichen Punkte I nur noch ein Punkt der Linie IM in die Linie IG fällt; so liegt die Linie IM ohne Ende fort in der Linie IG, und beide Linien sind also in dieser Lage nur eine einzige, mithin decken sie einander, und sind demnach einander gleich. Und auf eben die Art ist klar, daß die unendliche Linie IM auch allen übrigen IK, IB, ID u. s. w. gleich ist.

Lehrsaz b.

Jede gerade Linie IB, die von I aus nur nach einer Seite B ohne Ende fortgeht, ist die Hälfte von der ganzen durch I nach beiden Seiten B und M ohne Ende fortgehenden Linien MB.

Beweis. Denn da $IB + IM = MB$, und $IB = IM$ (Lehrsaz a); so ist $IB = \frac{1}{2}MB$.

Lehr-

Lehrsaz c.

Alle gerade Linien, die bloß nach einer Seite ohne Ende fortgehen, sind einander gleich, die Lage ihrer Anfangspunkte, von welchen sie ausgehen, sey so verschieden, als man wolle.

Beweis. Denn die Linien gehen entweder, wie IM, IG, IB, IL u. s. w. alle aus eben demselben Punkte I aus, oder ihre Anfangspunkte sind verschieden. Gehen sie alle aus einem Punkte I aus; so sind sie alle einander gleich (Lehrs. a). Sind aber ihre Anfangspunkte verschieden; so liegt der Anfangspunkt der einen entweder innerhalb, oder ausserhalb der andern. Liegt er innerhalb der andern, wie z. B. in den unendlichen Linien IB und AB; so ist sowohl IB $=\frac{1}{2}$MB, als auch AB $=\frac{1}{2}$MB (Lehrs. b), also IB $=$ AB. Liegt aber der Anfangspunkt der einen Linie ausserhalb der andern, wie z. B. IG und AC; so ist IG $=$ IB, und AC $=$ AB (Lehrs. a). Nun aber ist vermöge des eben vorher Erwiesenen IB $=$ AB, folglich auch IG $=$ AC. Also ist der Saz in allen möglichen Fällen wahr.

1. Zus. Da also IB $=$ AB ist; so wird weder die unbegrenzte Linie IB vergrössert, wenn man einen endlichen Theil AI zu ihr hinzusezt, noch die unbegrenzte Linie AB vermindert, wenn man einen endlichen Theil AI von ihr wegnimmt. Also ist jede endliche Linie AI, so groß sie immer seyn mag, gegen eine unbegrenzte Linie IB oder AB eine wahre Null.

2. Zus.

2. Zuſ. Da in allen geradlinigten Winkeln ein jeder Schenkel eine gerade Linie iſt, die vom Scheitel des Winkels nach einer Seite ohne Ende fortgeht; ſo ſind alle unendliche Schenkel in allen geradlinigten Winkeln einander gleich, wo auch immer ihre Scheitel in der Ebene liegen mögen.

Lehrſaz d.

Gleiche Winkel haben auch allemal gleiche Flächen, die Lage der Winkel gegen einander ſey, welche man will.

Beweis. Denn man nehme ein Paar gleiche Winkel, welche man will, z. B. die Winkel CMB, FLB (fig. 6.). Nun lege man den Schenkel LB auf MB, ſo daß L auf M fällt; ſo muß, weil gleiche Winkel einander decken, der Schenkel LF auf MC fallen. Nun aber ſind die unendlichen Schenkel LB, MB, LF, MC alle einander gleich (Lehrſ. c), und gleiche gerade Linien decken einander, folglich deckt der unendliche Schenkel LB den Schenkel MB, und der unendliche Schenkel LF den Schenkel MC, mithin deckt auch die unendliche Winkelfläche FLB, die zwiſchen den Schenkeln LB und LF enthalten iſt, die Winkelfläche CMB, die zwiſchen MB und MC liegt. Alſo ſind die Winkelflächen FLB, CMB einander gleich.

Nach dieſer ganz leichten Methode, die auch einem Anfänger von mittelmäßiger Fähigkeit faßlich ſeyn muß, iſt die Allgemeinheit meines erſten

Lehr-

Lehrsazzes, daß gleiche Winkel auch allemal gleiche Flächen haben, so geometrisch gewiß, daß gar kein weiterer Einwurf dawider mehr Statt findet. Da dieselbe eine unmittelbare Folge des Sazzes c ist; so bewies ich diesen schon in meiner Schrift S. 91. 92. auf eben die Art, wie hier. Es ist mir daher unerklärbar, wie meine so scharfsinnigen Recensenten diesen Saz, der doch die Schwierigkeit, die ihnen bey meiner Theorie übrig zu bleiben scheint, aufs evidenteste und bündigste hebt, so ganz und gar haben übergehen können, ohne desselben mit einem Worte Erwähnung zu thun. Denn ich wäre wohl sehr begierig, zu wissen, was auch der grösseste und strengste Geometer wider denselben einzuwenden im Stande wäre.

Die zwote Methode, die Theorie der Parallelen mit der grössesten Schärfe darzuthun, enthält folgende Säzze:

Lehrsaz α.

Die Flächen zweener Verticalwinkel sind allemal einander gleich.

Beweis. Denn man nehme z. B. (fig. 6.) die Verticalwinkel CMB, DMA; so sind sie einander gleich. Nun lege man den Winkel CMB auf den Winkel DMA so, daß MC auf MD fällt; so fällt MB auf MA, folglich liegt MC ohne Ende fort auf MD, und MB ohne Ende fort auf MA, d. i. MC deckt MD, und MB deckt MA. Also deckt auch die unendliche Fläche CMB, die

die zwischen MC und MB liegt; die Fläche DMA, die zwischen MD und MA liegt. Also sind die Flächen der Verticalwinkel CMB, DMA einander gleich. Und da eben dieser Beweis bey jedem andern Paar Verticalwinkel z. B. FLB und GLA, HKB und IKA ganz derselbe ist; so sind überhaupt die Flächen zweener Verticalwinkel allemal einander gleich.

Lehrsaz β.

Wenn die Winkel FLB und CMB gleich sind; so sind auch ihre Flächen gleich.

Beweis. Denn man verlängere die Schenkel CM, FL nach D und G; so ist die Winkelfläche FLB = GLA (Lehrs. α). Da nun die Winkel FLB, CMB gleich sind (p. hyp.); so sind CD, FG parallel, und stossen also niemals zusammen, folglich ist GLA = DMA + DMLG, also FLB = DMA + DMLG. Nun aber ist die Fläche DMA = CMB (Lehrs. α), folglich ist die Fläche FLB = CMB + DMLG. Da nun CMB = FLB + MCFL ist; so ist die Fläche FLB = FLB + MCFL + DMLG. Also wird die unendliche Winkelfläche FLB gar nicht vergrössert, wenn man zu ihr die beiden unendlichen Streifen MCFL und DMLG hinzusezt, mithin kann sie um so weniger vergrössert werden, wenn man ihr bloß den einen unendlichen Streifen MCFL hinzufügt. Also ist die Fläche FLB = FLB + MCFL. Nun aber ist FLB

+ MCFL

$+MCFL = CMB$. Also ist die Winkelfläche $FLB = CMB$.

Anmerkung.

Es verdient hier bemerkt zu werden, daß der Beweis dieses Lehrsazzes schlechterdings voraussezt, daß die Schenkel MC, LF der gleichen Winkel x, y parallel seyn. Dieser Umstand zeigt also unmittelbar an, daß jede andere unendliche Fläche, die nicht wie CMLF zwischen zwo Parallelen MC, LF enthalten ist, die Winkelfläche FLB allemal vergrössere.

Lehrsaz γ.

Wenn (fig. 12.) der Winkel $GIB > CAB$ ist; so stossen die Linien IG, AC, wenn man sie gehörig verlängert, nach der Seite C, G hin nothwendig zusammen.

Beweis. Denn man mache den Winkel $BIK = CAB$; so fällt IK innerhalb den grössern Winkel GIB, und es ist die Winkelfläche $KIB = CAB$ (Lehrs. β). Nun sezze man, IG stiesse mit AC nach der Seite C, G hin niemals zusammen; so wäre die Winkelfläche GIB ein Theil von der Winkelfläche CAB, folglich auch nur ein Theil der Winkelfläche KIB. Da nun dieses der gröste Widerspruch ist; so müssen IG und AC nothwendig nach C, G hin zusammenstossen.

Diese zweite Methode ist wiederum so einleuchtend strenge, als es nur irgend eine Demonstration

stration im ganzen Euklides seyn kann. Sie beruhet bloß auf dem Sazze α, daß die Flächen der Verticalwinkel nothwendig allemal gleich sind, und ist es möglich diesen Saz zu bezweifeln, dann würde es Zeit seyn, der Evidenz der ganzen Euklideischen Geometrie gute Nacht zu sagen. Uebrigens wird der Beweis des strittigen eilften Euklideischen Grundsazzes, der im Lehrsazze γ ausgedruckt ist, hier noch heller, indem man hier gar nicht einmal den zweiten Lehrsaz meiner ersten Schrift voraussezzen darf. Da indessen der Saz β schon den Saz voraussezt, daß, wenn die Winkel x, y gleich sind, MC und LF parallel seyn, dieser aber sich gleichfalls so leicht und schön unmittelbar aus der Vergleichung der Winkelflächen herleiten läst; so verdient in einem Systeme der Elementar-Geometrie die erste Methode vor dieser zweiten gleichwohl den Vorzug.

Allein die Betrachtung der Winkelflächen ist nicht so dürftig, daß man bloß an diese beiden ersten Methoden gebunden wäre. Es ist noch eine dritte Methode da, zu welcher ich in meiner entdeckten Theorie der Parallelen S. 60. 61. 63. bereits die nöthigen Winke gegeben habe. Diese besteht darin, daß man nicht bloß bey der Betrachtung des Unterschiedes der Winkelflächen, oder ihrem arithmetischen Verhältnisse stehen bleibt, sondern diese Materie ganz vollständig bearbeitet, und zeigt, daß die Winkel und ihre Flächen allemal in einem geometrischen Verhältnisse

stehen,

stehen, und daher die Winkelfläche allemal das Maaß des ihr zugehörigen Winkels ist. Da ich mir nicht vorstellen konnte, daß irgend jemand im Ernste daran zweifeln sollte, daß, wenn ein Paar Winkel einander decken, auch nothwendig ihre unendliche Flächen, die lediglich von der Grösse der Winkel bestimmt werden, einander decken müssen, um so mehr, da ich die scheinbare Schwierigkeit, die sich hier fig. 6. äussert, S. 91. 92. ganz apodiktisch gehoben hatte; so wollte ich diese Methode in meiner Schrift noch nicht wählen, sondern die vollständige Theorie der Winkelflächen für meine Theorie der Lage aufbewahren. Da ich aber wider mein Vermuthen gleichwohl das Gegentheil erfahren habe; so ist es mir in der That leid, daß ich diesen Weg nicht sogleich in meiner Schrift gewählt und dadurch alle mögliche Einwendungen auf einmal zernichtet habe.

Nach dieser dritten Methode verfahre ich folgendermaassen:

Lehrsaz A.

Derjenige Theil der ganzen unendlichen Ebene, welcher über einer nach beiden Seiten ohne Ende fortgehenden geraden Linie MB (fig. 2.) liegt, ist die Fläche eines Winkels von 180°, und die ganze unendliche Ebene sowohl über als unter MB ist die Fläche eines Winkels von 360°.

Beweis. Denn die unendliche Ebene über MB ist die Fläche des geraden Winkels MAB, der aus den beiden Nebenwinkeln CAM und CAB besteht, also die Fläche eines Winkels von 180°. Die ganze unendliche Ebene aber, die sowohl über, als unter MB liegt, ist die Fläche eines Winkels, der so groß ist, als die vier Winkel CAM + CAB + FAB + FAM, also die Fläche eines Winkels von 360°.

Lehrsaz B.

Die Fläche eines jeden rechten Winkels ist der vierte Theil von der ganzen unendlichen Ebene.

Beweis. Denn die Flächen der vier rechten Winkel CMA, CMB, DMB, DMA (fig. 7.) machen zusammen die ganze unendliche Ebene, in welcher sie liegen. Nun sind, vermöge der Definition des rechten Winkels, diese vier Winkel einander gleich, und da sie alle einen gemeinschaftlichen Scheitel M haben, so lassen sich alle vier dergestalt auf einander legen, daß ihre Flächen einander decken, folglich sind alle diese vier Winkelflächen einander gleich. Also ist jede von ihnen z. B. die Fläche CMB der vierte Theil der ganzen unendlichen Ebene.

Auf eben diese Art ist klar, daß auch die Fläche des rechten Winkels FLB der 4te Theil von eben derselben ganzen unendlichen Ebene ist,

und

und so überhaupt die Fläche eines jeden andern rechten Winkels.

Zus. Da also sowohl die Fläche des rechten Winkels FLB, als die Fläche des rechten Winkels CMB der vierte Theil der ganzen unendlichen Ebene ist; so ist die Fläche FLB eben so groß, als die Fläche CMB. Also ist der Parallelstreifen CMLF, um welchen die Flächen FLB, CMB unterschieden sind, in Vergleichung mit ihnen eine völlige Null, d. i. die Winkelfläche FLB wird dadurch, daß man den unendlichen Streifen CMLF zu ihr hinzu nimmt, eben so wenig grösser, als die Winkelfläche CMB dadurch, daß man diesen Streifen von ihr wegnimmt, kleiner wird.

Wie leicht und klar ist also schon hiedurch die ganze Illusion von Vergrösserung, die hier der Anblick der Figur zu lehren scheint, aufgedeckt und hinweggeräumt!

Lehrsaz C.

Wenn n eine ganze Zahl bedeutet und der Winkel RFO n mal (z. B. 4 mal) so groß ist, als der Winkel RFH (fig. 20.); so ist die Winkelfläche RFO gleichfalls n mal (z. B. 4 mal) so groß, als die Winkelfläche RFH.

Beweis. Denn es seyn die n (z. B. 4) gleichen Winkel, welche der Winkel RFO enthält, die Winkel RFH, HFK, KFM, MFO. Da nun

alle diese gleichen Winkel einerley Scheitel und 2 nächstfolgende allemal einen gemeinschaftlichen Schenkel haben; so lassen sie sich nach der Reihe so auf einander legen, daß ihre Flächen einander decken, z. B. wenn man den Winkel HFK um den Schenkel FH dreht; so fällt der Schenkel FK auf FR, also die ganze Fläche HFK auf die Fläche HFR. Also sind alle Flächen der n gleichen Winkel RFH, HFK, KFM u. s. w. gleich groß, folglich sind alle n Winkelflächen zusammen n mal so groß, als die einzelne Winkelfläche RFH. Nun aber machen alle diese n Winkelflächen zusammen die Winkelfläche RFO aus (p. hyp.) Also ist die Winkelfläche RFO n mal so groß, als die Winkelfläche RFH.

Lehrsaz D.

Die Fläche eines jeden Winkels PFK (fig. 20.) verhält sich zur ganzen unendlichen Ebene, wie der Winkel PFK zu 360°, das Verhältniß des Winkels zu 360° sey rational oder irrational.

Beweis. Denn man sezze zuerst, das Verhältniß des Winkels PFK zu 360° sey rational; nämlich PFK : 360° = n : m; so ist der Winkel

$$PFK = \frac{n}{m} \cdot 360°.$$ Es sey daher der Winkel

$$PFR = \frac{1}{m} \cdot 360°;$$ so ist $360° = m.PFR$,

und

und der Winkel PFK = n . PFR, folglich ist die Fläche des Winkels von 360° gleichfalls m mal, und die Fläche des Winkels PFK n mal so groß, als die Fläche des Winkels PFR (Lehrs. C). Also verhält sich die Fläche des Winkels PFK zur Fläche des Winkels von 360°, wie n : m. Nun aber ist die Fläche des Winkels von 360° die ganze unendliche Ebene (Lehrs. A). Also verhält sich die Fläche des Winkels PFK zur ganzen unendlichen Ebene, wie n : m, d. i. wie der Winkel PFK zu 360°.

Gesezt aber, das Verhältniß des Winkels PFK zu 360° wäre irrational; so ist, wenn 360° = m . PFR ist, zwar niemals der Winkel PFK = n . PFR, indessen läst sich doch allemal die Zahl n so annehmen, daß der Winkel PFK grösser, als n . PFR, aber kleiner, als (n + 1) . PFR ist. Man sezze also, es sey der Winkel PFH = n . PFR, und der Winkel PFM = (n + 1) . PFR; so ist vermöge des Vorigen der Winkel PFK grösser, als PFH, aber kleiner, als PFM, folglich fällt der Schenkel FH innerhalb, und der Schenkel FM ausserhalb des Winkels PFK, mithin ist auch die Fläche des Winkels PFK grösser, als die Fläche des Winkels PFH, aber kleiner, als die Fläche des Winkels PFM. Wenn daher der Winkel PFK grösser ist, als n . PFR, aber kleiner, als (n + 1) . PFR; so ist auch die Fläche des Winkels PFK grösser, als die Fläche des

Winkels n. PFR, aber kleiner, als die Fläche des Winkels (n + 1). PFR. Nun ist PFR $= \frac{1}{m} \cdot 360°$ (p. hyp.). Wenn daher der Winkel PFK gröſſer ist, als $\frac{n}{m} \cdot 360°$, aber kleiner, als $\frac{n+1}{m} \cdot 360°$; so ist auch die Fläche des Winkels PFK allemal gröſſer, als die Fläche des Winkels $\frac{n}{m} \cdot 360°$, aber kleiner, als die Fläche des Winkels $\frac{n+1}{m} \cdot 360°$. Also verhält sich auch hier allemal die Fläche des Winkels PFK zur Fläche des Winkels von 360°, wie der Winkel PFK zu 360° (Karstens Lehrbegriff der gesammten Mathematik, erster Theil, S. 321. §. 175.) d. i. die Fläche des Winkels PFK verhält sich zur ganzen unendlichen Ebene, wie der Winkel PFK zu 360°.

Lehrsaz E.

Die Flächen zweener Winkel GIB und CAB (fig. 2.) verhalten sich allemal, wie die Winkel selbst, ihre Lage gegen einander in der Ebene sey, welche man will.

Beweis. Denn die Fläche GIB verhält sich zur ganzen unendlichen Ebene, wie der Winkel

GIB

GIB zu 360°, und die Fläche CAB verhält sich zur ganzen unendlichen Ebene, wie der Winkel CAB zu 360° (Lehrs. D). Man drucke also, der Kürze wegen, die ganze unendliche Ebene durch P aus; so ist die Fläche $GIB = \frac{P.\ Winkel\ GIB}{360°}$, und die Fläche $CAB = \frac{P.\ Winkel\ CAB}{360°}$. Also verhält sich die Fläche GIB zur Fläche CAB, wie der Winkel GIB zum Winkel CAB.

Zus. Wenn daher die Winkel GIB und CAB einander gleich sind; so sind auch ihre Flächen gleich. Ist dagegen der Winkel GIB grösser, als der Winkel CAB; so ist auch die Fläche GIB grösser, als die Fläche CAB. Sind umgekehrt die Winkelflächen GIB und CAB gleich; so sind auch die ihnen zugehörigen Winkel gleich. Ist dagegen die Winkelfläche GIB grösser, als die Winkelfläche CAB; so ist auch der Winkel GIB grösser, als der Winkel CAB, die Lage, welche die Winkel gegen einander in der Ebene haben, mag in allen diesen 4 Fällen seyn, welche man irgend will.

Anmerkung.

In diesem Corollario sind also die 4 ersten Lehrsäzze, die in meiner Theorie der Parallelen zum Grunde gelegt worden, in ihrer grösten Allgemeinheit, mit der grössesten geometrischen Schärfe

und Evidenz erwiesen. Man sezze z. B. die gleichen Winkel FLB und CMB seyn jeder 20° (fig. 6.); so ist, wenn man die ganze unendliche Ebene = P sezt, sowohl die Fläche FLB, als CMB $= \frac{20}{360}$ P d. i. $\frac{1}{18}$ P (Lehrs. D). Wer demnach sagen wollte: die Fläche FLB scheint doch kleiner zu seyn, als die Fläche CMB, der würde sagen: es scheint doch, daß der 18te Theil von eben derselben Grösse P sich nicht selbst gleich seyn darf, sondern bald grösser, bald kleiner seyn kann, d. i. $\frac{1}{18}$ P kann auch wohl $\frac{1}{19}$ P seyn. Man sezze ferner, der Winkel GIB (fig. 2.) sey 20° und der Winkel CAB = 18°; so ist die Fläche GIB = $\frac{1}{18}$ P, und die Fläche CAB = $\frac{18}{360}$ P = $\frac{1}{20}$ P. Wer demnach sagen will: die Fläche GIB kann doch vielleicht kleiner seyn, als die Fläche CAB, der sagt nichts weiter, als: $\frac{1}{18}$ P kann vielleicht kleiner seyn, als $\frac{1}{20}$ P, d. i. $\frac{1}{18} < \frac{1}{20}$, oder 20 kann kleiner seyn, als 18. Da also diese dritte Methode die ganze Natur der Winkelflächen am hellesten und vollständigsten entwickelt; so gebe ich ihr in meiner Theorie der Parallelen fortmehro vor allen übrigen den Vorzug, und sezze in die Stelle der vier ersten Lehrsäzze, die in jener S. 68 - 70. zum Grunde gelegt sind, die hier bewiesenen fünf Lehrsäzze A, B, C, D, E nebst dem Zusazze des lezten. Indessen überlasse ich es einem jeden Geometer, ob er eben diese dritte Methode, oder eine von den beiden erstern in seine Elementar-Geometrie aufnehmen will. Man wähle die eine oder

die

die andere; so ist nunmehr die ganze Theorie der Parallelen nach allen drey Beweisarten, die ich in meiner ersten Schrift davon gegeben habe, so klar und unwidersprechlich erwiesen, als irgend ein Saz im Euklides.

Da ich einmal die wahre Natur der Winkelflächen aufgedeckt habe; so will ich diese Materie zugleich ganz vollständig abhandeln. So wie man den 360sten Theil der Peripherie eines Cirkels einen Grad, den 60sten Theil eines Grades eine Minute, und den 60sten Theil einer Minute eine Secunde nennt; so will ich diejenige Winkelfläche, welche der 360ste Theil der ganzen unendlichen Ebene ist, einen Flächen-Grad, diejenige, die der 60ste Theil eines Flächen-Grads ist, eine Flächen-Minute, und diejenige, die der 60ste Theil einer Flächen-Minute ist, eine Flächen-Secunde nennen u. s. w. Auf diese Art enthält jeder Winkel cab (fig. 4.) eben so viele Grade, Minuten und Secunden, als seine Fläche cab enthält. Denn die Grade des Winkels cab verhalten sich zu 360°, wie die Fläche cab zur ganzen Ebene (Lehrs. D), d. i. wie die Flächen-Grade von cab zu 360 Flächen-Graden, folglich verhält sich (permutando) die Zahl der Grade des Winkels cab, zur Zahl der Flächen-Grade von cab, wie 360 zu 360. Also ist die Zahl der Grade des Winkels cab eben so groß, als die Zahl der Grade seiner Fläche, und es ist demnach

einerley, ob man die Grade eines Winkels, oder seiner Fläche nimmt. So wie man also bisher die Winkel durch Kreisbogen gemessen hat, die zwischen ihren Schenkeln liegen, und umgekehrt; so kann man dieselbe nunmehr eben sowohl durch ihre Flächen und umgekehrt die Winkelflächen durch die Winkel selbst messen, und aus eben dem Grunde, aus welchem man den Kreisbogen das Maaß des Winkels, und den Winkel das Maaß des Bogens nennt, kann man auch die Fläche eines Winkels das Maaß desselben, und den Winkel das Maaß seiner Fläche nennen.

Auf eben die Art, wie ich in der dritten Methode die Theorie der Winkelflächen festgestellt habe, läst sich auch, wie jeder Geometer von selbst einsehen wird, die Theorie der unendlichen Körperlichen Räume, welche zwischen den Ebenen der Flächenwinkel enthalten sind, herleiten, und erweisen, daß der ganze unendliche Raum, der Raum eines Flächenwinkels von 360° ist, daß jeder Raum eines jeden Flächenwinkels sich zum ganzen unendlichen Raum verhält, wie die Grade des Flächenwinkels zu 360°, daß mithin die Räume zweener Flächenwinkel sich allemal wie die Flächenwinkel selbst verhalten, und daß man also, wenn man denjenigen Raum eines Flächenwinkels, welcher der 360ste Theil eines ganzen unendlichen Raums ist, einen Raum-Grad, den 60sten Theil eines Raum-Grades eine Raum-Minute, den

60sten

60sten Theil von dieser eine Raum-Secunde nennt, die Flächenwinkel nunmehr noch leichter durch ihre Räume messen kann, als wir sie bisher durch die sogenannten Neigungswinkel ihrer Ebenen gemessen haben.

Es würde mir leicht seyn, diese ganze Theorie hier beizufügen, allein, um nicht zu weitläuftig zu seyn, überlasse ich den Freunden der Geometrie das Vergnügen, dieselbe selbst aufzusuchen.

Dem ungemein gründlichen und tiefdenkenden Recensenten meiner Schrift in der A. Litt. Zeitung schien das Unternehmen, die Lehre von den Winkelflächen in die Elementar-Geometrie einführen zu wollen, beinahe an Kühnheit zu grenzen. „Die „Sache,„ sagt er von meiner Theorie der Parallelen, „betrift nichts Geringeres, als die Entdeckung eines neuen Princips der Geometrie: die „Grösse eines ebenen Winkels werde durch „die Grösse der Ebene bestimmt, die zwischen „seinen ohne Ende verlängerten Schenkeln „liegt. Die Einführung einer unendlichen Grösse, „die Bestimmung einer Grösse durch eine andere, „die mit ihr nicht gleichartig ist, beide gleich zu Anfange der Geometrie, gleich beim ersten Eintritt! „muß nothwendig jedem Kenner der ächten geometrischen Methode äusserst auffallend seyn.„ Nun fällt wohl das leztere Auffallende von selbst weg,

weg, denn mißt nicht jeder Geometer den ebenen geradlinigten Winkel durch einen ihm ganz ungleichartigen Kreisbogen, und den Flächenwinkel, dessen Schenkel Ebenen sind, durch den Neigungswinkel, dessen Schenkel gerade Linien sind? Das erstere Unternehmen, gestehe ich, kann allerdings im Anfange auffallend und kühn scheinen, denn eben dieses halte ich noch immer für den wahren und einzigen Grund, woher dieses so fruchtbare und nüzliche Prinzip den Geometern, deren scharfen und tiefen Nachforschungen auch das Versteckteste nicht entgangen ist, so lange verborgen geblieben ist. Allein, wenn man auf die Methode zurück sieht, wie ich diese ganze Lehre erwiesen habe; so wird nunmehr auch hier das Auffallende von selbst verschwinden, indem sich die unendlichen Winkelflächen ohne die geringste Hinderniß eben so, wie endliche Grössen, mit einander vergleichen lassen, und eben so, wie leztere, gegen einander allemal ein bestimmtes endliches Verhältniß haben.

Hiedurch widerlegt sich auch zugleich der sonst sehr scheinbare Gedanke des vorerwähnten Recensenten, als ob die Schwierigkeiten, die beym Unendlichen in der Elementar-Geometrie sich zeigen, daher rühren, weil man das Unendliche nicht so, wie die endlichen Grössen geben könne, und auch die Begriffe bey jenem sich nicht so wie bey diesem deutlich construiren lassen. Eine empirische Construction, d. i. eine sinnliche Zeichnung des

Unend-

Unendlichen ist zwar allerdings nicht möglich. Allein was die eigentliche geometrische Construction betrift, die nicht in einer sinnlichen Abbildung, sondern in reiner Anschauung besteht; so läst sich, meiner Meinung nach, das Unendliche in der Geometrie eben so vollkommen, als das Endliche construiren. So habe ich z. B. von der nach der Seite B ohne Ende fortgehenden geraden Linie AB (fig. 2.) einen ganz anschaulichen Begriff, und ich kann sie in Gedanken ohne Ende fort eben so gut, als die endliche Linie AI ziehen, denn durch die Punkte A und I ist sie mir ohne Ende fort gegeben, und zwar so klar und anschaulich, daß es mir unmöglich ist, sie mit irgend einer andern AC im ganzen möglichen Raume zu verwirren. Eben so anschaulich ist mein Begriff von der unendlichen Winkelfläche faB (fig. 9.), und ich kann sie wiederum in Gedanken ohne Ende legen. Denn durch den Scheitel a und irgend 2 andere Punkte d, I in den beiden Schenkeln af, aB ist mir die Lage der leztern, und daher auch die zwischen ihnen befindliche Fläche ohne Ende fort gegeben, und dieses wiederum so klar, daß es, mir unmöglich fällt, sie mit irgend einem andern Theil der ganzen möglichen Ebene zu vermischen. Ein gleiches gilt selbst von unendlichen krummen Linien- und Flächen, z. B. von einer Parabel oder Hyperbel, und der zwischen ihren Schenkeln ohne Ende fortgehenden Fläche, denn durch ihre Gleichung ist mir

das

das Gesez gegeben, nach welchem ich sie in Gedanken ohne Ende fortziehen kann. Ich weiß wohl, daß man das Unendliche vom Endlichen eben dadurch zu unterscheiden pflegt, daß man sagt: das Endliche läst sich angeben, das Unendliche dagegen nicht. Allein es ist auch offenbar, daß dieses nichts weiter sagt, als: im Endlichen sind die Grenzen, wo es anfängt und aufhört, völlig und durchgängig bestimmt, im Unendlichen dagegen nicht, sondern wenn wir diesem auch eine gewisse Anfangsgrenze geben; so hört es doch nach irgend einer oder auch nach mehrern Seiten hin nirgends auf, und ist in dieser Art ohne Ende fortgehend. So geht z. B. eine Winkelfläche, imgleichen ein pyramidalischer Raum nach einer, ein prismatischer nach zwo, der Raum eines Flächenwinkels nach drey, und der ganze unendliche Raum nach allen möglichen Seiten ohne Ende fort. Daß also das Unendliche sich nicht angeben läst, hindert gar nicht, daß es uns nicht durch reine Anschauung gegeben seyn sollte. Denn jenes sagt nur, daß es ohne Ende fortgehend ist, demohngeachtet aber kann uns, wie gezeigt worden, sein Fortgang ohne Ende eben so klar und evident seyn, als die Vorstellung des Endlichen. Vielmehr würde uns das Endliche gar nicht gegeben seyn, wenn uns nicht das Unendliche gegeben wäre, d. i. die Construction des Endlichen sezt schon die Construction des Unendlichen voraus, so daß jene ohne diese

gar

gar nicht einmal möglich ist. Denn jede bestimmte Grösse läst sich ohne Ende vermehren, daher kann ich eine endliche Grösse nicht anders denken, als daß ich sie mir als einen begrenzten Theil des Unbegrenzten oder Unendlichen vorstelle. So ist der Raum, nach der ursprünglichen intuitiven Vorstellung, die wir von ihm haben, nur ein einziger nach allen möglichen Seiten ohne Ende fortgehender Raum. Dieses ist unsere allererste wesentliche geometrische Construction, oder diejenige reine Anschauung, in welcher uns der Begriff vom Raum, als dem Gegenstande der Geometrie, ursprünglich dargestellt wird. Wenn wir uns daher einen endlichen Körper oder eine endliche Fläche und Linie denken; so kann dieses nicht anders geschehen, als daß wir in dem ganzen möglichen Raum, der vermöge unserer Anschauung unendlich ist, gewisse Grenzen annehmen und diese genau und völlig bestimmen. So ist es mir unmöglich, eine körperliche Figur zu denken, ohne sie mir als einen Theil des ganzen unendlichen Raums vorzustellen, und ihr eben in diesem ihren Ort zu bestimmen. Eben so wenig kann ich irgend eine ebene Figur, oder eine endliche gerade Linie denken, ohne mir die erstere als einen Theil der ganzen unendlichen Ebene, und die leztere als einen Theil der ganzen ohne Ende verlängerten Linie vorzustellen. So sehr man daher auch das Un-

endliche aus der Elementar-Geometrie zu entfernen gesucht hat; so hat diese dasselbe doch in der That niemals entbehren können. Denn was sagt das zweite Postulat des Euklides: eine gerade Linie ohne Ende zu verlängern, im Grunde wohl anders, als: ich soll sie mir als einen Theil einer unendlichen Linie vorstellen, und sie also in Gedanken ohne Ende fortziehen. Da ich nun ferner eine jede gerade Linie nothwendig in irgend einer Ebene denken muß, verlangt also erwähntes Postulat nicht zugleich, daß ich mir auch jede Ebene als ringsum ohne Ende fortgehend vorstellen muß? Liessen sich demnach die Begriffe einer unendlichen geraden Linie und Ebene nicht construiren; so hätte Euklides durch sein zweites Postulat offenbar seine eigne allein ächte geometrische Methode verlezt, welches doch wohl kein Geometer behaupten wird. Allein lassen sich die Begriffe einer unendlichen geraden Linie und Ebene construiren; so folgt hieraus unmittelbar, daß sich auch der Begriff einer unendlichen Winkelfläche construiren läst. Und das zeigt auch der Anblick der ganzen Art, wie ich hier die Lehre von den Winkelflächen entwickelt habe. Denn in allen drey Methoden, nach welchen ich gegangen bin, ist kein einziger Saz durch einen Schluß aus Begriffen gefolgert, sondern jeder derselben ist auf eben die Art, wie Euklides in seiner ganzen

zen Geometrie verfährt, durch wirkliche Construction der Begriffe, vermittelst des Deckens der geraden Linien und Flächen, unmittelbar aus dem zweiten Postulate und dem achten Grundsazze des Euklides hergeleitet worden. Die Einführung der Lehre von den Winkelflächen in die Elementar-Geometrie ist also dem Geiste der ächten geometrischen Methode so wenig entgegen, daß vielmehr hiedurch eine beträchtliche Lücke in dieser Wissenschaft ausgefüllet wird, und der Anfänger ihr Object, nämlich den unendlichen Raum, nun auf die leichteste Art sogleich beym ersten Eintritt in die Wissenschaft, ohne den ächten geometrischen Gang im geringsten unterbrochen zu sehen, in seiner ganzen Klarheit und Deutlichkeit kennen lernt, ja sogar die verschiednen Ordnungen des Unendlichen durch geometrische Construction ganz anschaulich vor sich sieht.

Da also aus der demonstrirten Gleichheit der Winkelflächen CMB und FLB (fig. 6.), von denen die leztere ein Theil der erstern ist, unmittelbar folgt, daß der Theil dem Ganzen gleich, und sein Nebentheil, selbst wenn er an sich unendlich groß ist, doch gegen ihn und das Ganze eine wahre Null seyn könne; so merkte ich S. 77. an, daß also der 9te Grundsaz des Euklides: das Ganze ist grösser als sein

Theil, nur unter der Einschränkung richtig ist, wenn sein Nebentheil gegen ihn nicht unendlich ist, sondern ein bestimmtes Verhältniß hat, (eine Einschränkung, von welcher an sich klar ist, daß sie bey endlichen Grössen, als mit welchen Euklides sich allein beschäftigen wollte, unnöthig ist, und daher bloß beim Unendlichen Statt finden kann). Hieraus schloß ich demnach, daß das vorige Axiom, wenn es allgemein von allen möglichen Grössen gültig seyn soll, nunmehr so ausgedruckt werden muß: das Ganze ist entweder gröſſer, als sein Theil, oder ihm gleich, und daher ist umgekehrt der Theil entweder kleiner, als das Ganze, oder dem Ganzen gleich, aber niemals gröſſer, als das Ganze. Hierüber macht mein vortreflicher Recensent in der Allg. Litt. Zeitung folgende Anmerkung: „Die Euklideischen Grundsäzze erstre„cken sich nur auf endliche positive Grössen, „können also auf unendliche und negative „nicht sicher angewendet werden, und haben „so oft Widersprüche gegeben. Wollte man „den gedachten Grundsaz auch zugleich auf ne„gative Grössen beziehen, so wie ihn Schultz „auf unendliche zu erstrecken gesucht hat, so „würde er noch allgemeiner werden, denn für „jene kann auch das Ganze kleiner seyn, als „sein Theil. Z. B. fig. 3., wenn der Schen„kel AC eine gemeinschaftliche Grenze der bei-

„den

„den Winkel BAC und CAD ist; so sind beide „einander entgegen gesezt, dieser negativ, wenn „jener positiv ist, folglich die Summe beider „Winkel das Ganze BAD kleiner, als der „eine Theil BAC. Die Theorie der Lage, „welche Schultz ehestens herauszugeben ver„spricht, muß ihn nothwendig auf dergleichen „entgegengesezte Linien, Winkel, Flächen und „Körper führen —„. Allein so fein auch diese weitere Verfolgung der Sache ist; so kann ich ihr doch nicht völlig beipflichten. Von allen 9 ersten Grundsäzzen des Euklides, die hier allein in Betrachtung kommen, ist bloß der 4te, 5te und 9te auf endliche Grössen eingeschränkt, weil $\infty \overset{+}{-} 3 = \infty \overset{+}{-} 82$ ist, die übrigen dagegen gelten insgesamt vom Unendlichen eben-sowohl, als vom Endlichen, und ich übernehme es ohne Bedenken, ihre Unschuld an jedem Widerspruche zu zeigen, den man etwa aus ihrer Anwendung aufs Unendliche folgern wollte.

Auf die negativen Grössen sind nach meiner Einsicht alle 8 ersten Grundsäzze des Euklides anwendbar. Aus dem 4ten und 5ten folgt bloß, daß die Entgegensezzung der Grössen auch die Entgegensezzung ihrer Werthe in sich schliest, so daß von 2 Grössen, von welchen positiv genommen die erstere kleiner ist, als die andere,

ſobald man ſie negativ ſezt, die erſtere gröſſer wird, als die andere, denn da z. B. $10 - 3 > 10 - 8$ iſt; ſo iſt, wenn man auf beiden Seiten 10 wegnimmt, nach dem 5ten Grundſazze, $-3 > -8$, da doch $+3 < +8$ iſt. Nun ſcheint hier zwar aus der Anwendung des 6ſten und 7ten Grundſazzes ein Widerſpruch zu folgen, denn wenn man ſowohl -3, als -8 durch -2 multiplicirt, oder dividirt; ſo ſcheint es, als wenn nach dieſen Grundſäzzen $+6 > +16$ und $+\frac{3}{2} > +4$ ſeyn müſte, allein dieſes folgt nicht, ſondern das Duplum und die Hälfte einer Gröſſe ſezzen ſchon an ſich voraus, daß der Multiplicator und Diviſor 2 nicht negativ, ſondern poſitiv ſey, und hier kommt wieder ganz richtig heraus, daß $-6 > -16$, und $-\frac{3}{2} > -4$ ſey. Was aber den 9ten Grundſaz anlangt; ſo hat dieſer, ſo viel ich einſehe, mit entgegengeſezten Gröſſen gar nichts zu thun, ſondern alle Theile des Ganzen müſſen, vermöge des Begriffs deſſelben, Gröſſen von einerley Bedingung ſeyn, d. i. entweder alle poſitiv, oder alle negativ, und es iſt daher unrichtig, wenn man die algebraiſche Summe von poſitiven und negativen Gröſſen ein Ganzes, und dieſe entgegengeſezten Gröſſen ſeine Theile nennt. Zu einer poſitiven Gröſſe $7a$ eine kleinere negative $-3a$ addiren, heiſt nichts anders, als die poſitive $3a$ von $7a$ ſubtrahiren, d. i. die kleine negative

Gröſſe

Grösse — 3a als einen wegzunehmenden Theil von 7a betrachten. Wenn daher — 3a + 7a = 4a ist; so heist dieses keinesweges so viel: 4a ist ein Ganzes, das aus den Theilen 7a und — 3a zusammengesezt, mithin kleiner, als der Theil 7a ist, sondern die positive Summe 4a ist derjenige Theil vom positiven Ganzen 7a, der übrig bleibt, wenn ich von lezterm den positiven Theil 3a wegnehme. Eben so heist zu einer negativen Grösse — 7a eine kleinere positive 3a addiren, nichts anders, als die negative — 3a von ihr subtrahiren, d. i. die kleinere positive Grösse 3a als einen wegzunehmenden Theil von — 7a betrachten, indem — 3a ein Theil von — 7a ist. Wenn daher — 7a + 3a = — 4a ist; so heist dieses wiederum nichts anders, als: die Summe — 4a ist derjenige Theil vom negativen Ganzen — 7a, welcher übrig bleibt, wenn man von lezterm den negativen Theil — 3a wegnimmt. Dieses erhellet auch schon aus dem allgemeinen Sprachgebrauch. Wenn ein Schiff 7 Meilen nach Osten segelt, und um 3 Meilen nach Westen zurückgetrieben wird; so beträgt seine wirkliche östliche Fortrückung nur 4 Meilen. Würde es hier nicht wider allen Sprachgebrauch seyn, den westlichen Rückgang einen Theil des östlichen Fortgangs zu nennen? Das Ganze aus entgegengesezten Grössen als Theilen zusammensezzen, und daher schliessen wollen: das Ganze

könne in dieser Rücksicht auch wohl kleiner seyn, als ein Theil von ihm, heist also nichts anders, als sich vom Ganzen einen Begriff machen, der wider allen Sprachgebrauch streitet. Indessen will ich mich mit niemanden, der etwa hierüber anders denkt, in einen Streit einlassen, der nur gar zu leicht Logomachie werden könnte, denn meine Theorie der Parallelen afficirt diese ganze Sache gar nicht, indem diese mit dem Negativen gar nichts zu thun hat, also hier der Grundsaz fest bleibt, daß das Ganze nie kleiner seyn kann, als sein Theil, sondern entweder gröſſer, als derselbe, oder wenigstens, wie es beym Unendlichen möglich ist, ihm gleich seyn muß.

Zum Beschluß muß ich noch eines Versehens erwähnen, das mir in der entdeckten Theorie der Parallelen S. 44. in meinem Urtheil über das neue System der Parallellinien des Herrn Prof. Hindenburg entschlüpft ist. Da mir nämlich schon das Fehlerhafte in dem Beweise für den zweiten Fall seines Sazzes, daß, wenn (fig. 21.) die Linien AB, CD mit der ausserhalb liegenden EF parallel sind, sie selbst parallel seyn, sogleich auffiel; so war ich auf den Beweis für den erstern Fall, daß, wenn 2 Linien AB, EF mit einer innerhalb ihnen liegenden CD parallel sind, selbst parallel seyn, zu wenig aufmerksam, und erklärte daher diesen für ganz strenge, zumal da die

täuschende Lage der Linie CD, so wie sie die Figur darstellt, hier keinen Fehlschluß argwöhnen ließ. Allein bey näherer Prüfung wurde ich inne, daß auch selbst der Beweis für den erstern Fall gar nicht bindet, sondern wiederum den streitigen Grundsaz des Euklides schon voraussezt. Herr Hindenburg schließt nämlich also: gesezt die Linien AB, EF, die mit CD parallel sind, stiessen nach einer Seite z. B. BF zusammen; so müste ihr Durchschnittspunkt entweder über, oder unter CD, oder in CD selbst liegen, folglich müsten, wider die Annahme, im ersten Fall EF, CD, im zweiten AB, CD, und im dritten sowohl AB, CD, als EF, CD einander schneiden. Allein der Schluß für die beiden ersten Fälle folgt nicht. Um dieses ganz einleuchtend zu erkennen, sezze man (fig. 18.), die Linie AB, welche in M auf IZ senkrecht ist, sey sowohl mit IC, als mit IG parallel; so liegt hier die Vergleichsparallele AB, wie es der erste Fall erfordert, innerhalb zwischen den Linien IC und IG. Wie will man nun hier beweisen, daß daher, weil IC und IG in I über AB zusammenstossen, die Linie AB gleichfalls mit IG zusammenstossen müsse, zumal da man den Winkel GIZ vom rechten Winkel so wenig als man will, verschieden, und den Punkt M von I so weit, als man will, entfernt annehmen kann. Ich frage: wie will man dieses beweisen, so lange

noch der Saz zweifelhaft ist, ob in dem Falle, da die beiden innern Winkel GIM und BMI zusammen kleiner, als 180° sind, die Linien IG und MB einander jedesmal nothwendig nach der Seite G, B hin schneiden müssen, d. i. so lange noch der eilfte Grundsaz des Euklides zweifelhaft ist? So ist demnach offenbar, daß schon der Beweis für den erstern Fall des Herrn Hindenburg, ohne den eilften Grundsaz des Euklides vorauszusezzen, gar nichts darthut, und daß es also, wenn ich dieses früher wahrgenommen hätte, nicht einmal nöthig gewesen wäre, mich in die ausführliche Widerlegung des Beweises für den zweiten Fall einzulassen. Hieraus ist nun zugleich klar, was man von dem neuen Grundsazze zu halten hat, aus welchem Herr Lorenz in seinem ohnlängst herausgegebenen Lehrbuch der Mathematik, die Theorie der Parallellinien herleitet, nämlich daß eine gerade Linie, welche innerhalb einem ebenen geradlinigten Winkel liegt, wenigstens einen von seinen Schenkeln schneiden müsse. Man sezze z. B. die gerade Linie, welche (fig. 18.) innerhalb dem Winkel CIG liegt, sey die Linie AB, die auf IZ in M senkrecht, und mit dem Schenkel IC parallel ist; so ist klar, daß AB den Schenkel IC nicht schneiden kann, also muß AB, vermöge des Lorenzischen Grundsazzes, den zweiten

Schen-

Schenkel IG schneiden. Nun frage ich: wie kommt meine Seele zu dieser Ueberzeugung so unmittelbar, daß ich weiter nach keinem Beweise fragen darf? AB schneidet ja nicht ID. Nun kann ich aber den stumpfen Winkel CIG so groß annehmen, daß der Schenkel IG der Linie ID so nahe kommt, als man will, und ausserdem kann ich noch den Punkt M, durch welchen AB geht, so weit von I entfernt annehmen, als man will? Wie kann ich es also so unmittelbar übersehen, ob nicht unter diesen Umständen AB mit IG eben sowohl gleichlaufend seyn könne, als mit ID? Das einzige, was mich auf die Gedanken bringen kann, daß dieses nicht Statt finde, sondern daß AB nothwendig IG schneide, muß also dieses seyn, weil hier der äussere Winkel BMZ grösser ist, als der innere GIZ, denn das weiß ich sicher, daß meine Behauptung: AB schneide IG, bloß unter dieser Bedingung wahr ist, und daß AB und IG sich nicht schneiden, sobald ich den Winkel GIZ eben so groß, oder gar grösser annehme, als BMZ. Also gründet sich meine Ueberzeugung vom Grundsazze des Herrn Lorenz lediglich auf meine Ueberzeugung vom eilften Grundsazze des Euklides. Den leztern aus dem erstern beweisen wollen, ist also doch wohl eine petitio principii, die in die Augen fällt. Es ist auch schon an sich klar, daß der Lorenzische Grund-

saz weit dunkler ist, als der Euklideische. Denn im leztern ist durch die Winkel BMZ und GIZ, die Lage der Schenkel MB und IG gegen einander durch Construction gegeben, und hiedurch haben wir schon von ihrem einmaligen Schneiden derselben die klare Vorstellung, welche jeden Geometer bisher immer davon überzeugt hat, obgleich niemand dieselbe deutlich zu machen im Stande war. Im Lorenzischen Grundsazze dagegen wird die Lage der Linie MB gegen des Winkels Schenkel IC und IG ganz unbestimmt gelassen, mithin muß mir hier, so lange ich noch keinen sichern Beweis von demselben habe, nothwendig die Besorgniß übrig bleiben, ob nicht unter allen den bestimmten Lagen, welche MB innerhalb dem Winkel haben kann, auch eine solche Statt finden könne, in welcher MB keinen von beiden Schenkeln schnitte. Soll diese Besorgniß gehoben werden; so muß ich also erst alle die möglichen Lagen bestimmen, welche eine gerade Linie innerhalb dem Winkel gegen jeden Schenkel haben kann, und dann werde ich bald auf solche Lagen von MB, wie z. B. fig. 18., kommen, wo ich mich von der Nothwendigkeit, daß MB entweder beide Schenkel, oder wenigstens einen schneiden müsse, auf keine Weise überzeugen kann, wofern ich nicht bereits vom eilften Grundsaz des Euklides überzeugt bin. Und

so

so ist klar, daß der vermeinte Grundsaz des Herrn Lorenz ein wirklicher Lehrsaz ist, der erst mit vielen Umständen aus dem Euklideischen Grundsazze hergeleitet werden muß, nicht aber dem Beweise des leztern zum Grunde liegen kann. Ueberhaupt sehe ich nicht ein, wozu irgend ein Versuch, den Euklideischen Grundsaz aus andern neuen Grundsäzzen zu beweisen, dienen könnte. Denn das kann man wohl sicher vermuthen, daß, wenn in der That ein solcher neuer Grundsaz möglich wäre, der diesen Namen mit Recht verdiente, so, daß niemand weiter Beweis davon zu fordern berechtigt wäre, derselbe von den so scharfsichtigen Geometern gewiß schon längst müste aufgefunden seyn. Legt man nun aber dem strittigen Euklideischen Grundsaz einen andern neuen zum Grunde, bey welchem wiederum eben so, wie bey jenem, die Frage nach einem Warum übrig bleibt; so sehe ich gar nicht ab, warum man es nicht lieber bey dem Euklideischen bewenden läst, sondern statt eines streitigen Grundsazzes zween dergleichen einführen will.

Ich habe nunmehr die ganze wichtige Materie so aufzuhellen gesucht, daß ich nichts weiter hinzusezzen darf. Hoffentlich wird es jezo kein Sachverständiger mehr für einen hohen Ton halten, wenn ich meiner Theorie der Parallelen

eben

eben die geometrische Evidenz und Schärfe beilege, welche irgend ein Saz im Euklides hat. Denn wer jezt noch im Stande ist, hieran zu zweifeln, den möchte ich wohl in seinen Zweifeln nicht weiter führen. Und so ist denn nun nicht nur die bisherige Lücke in der Elementar-Geometrie aufs angenehmste ausgefüllt, sondern auch zugleich die Grundlage zu einer Wissenschaft da, von welcher man bisher kaum den Gedanken der Möglichkeit fassen konnte, nämlich zur Meßkunst des Unendlichgrossen.

Halle, gedruckt bey Joh. Jac. Gebauer.

NOV 15 192

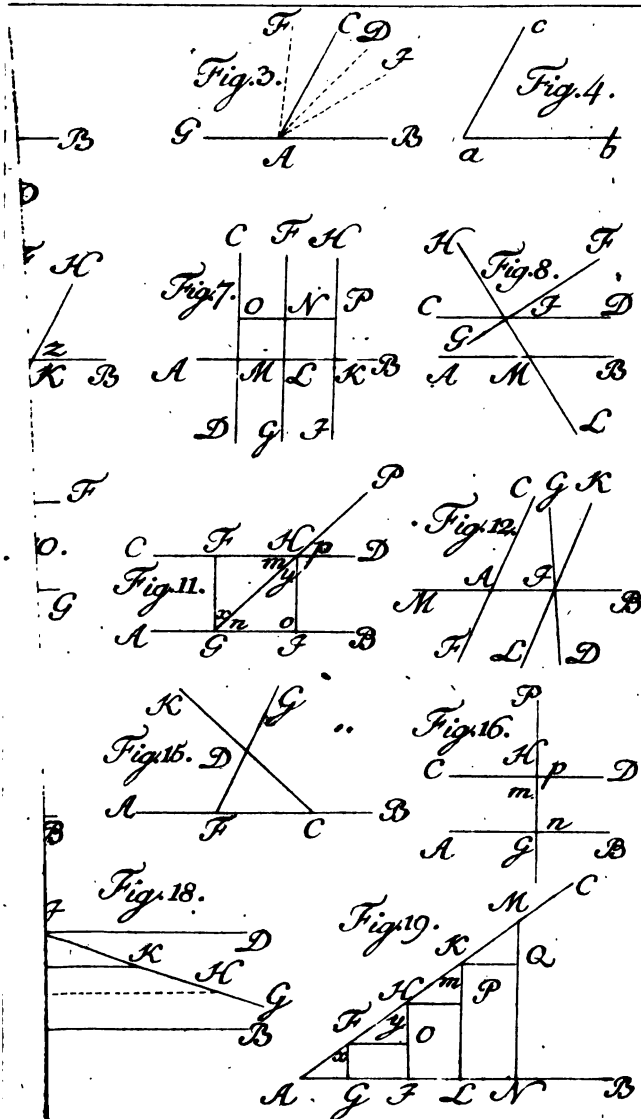


Fig. 3.
F
C
D
I
G
A
B
Fig. 4.
c
a
b
Fig. 7.
C
F
H
O
N
P
A
M
L
K
B
D
G
I
Fig. 8.
H
F
C
I
D
G
A
M
B
L
Fig. 11.
C
F
H
p
D
m
y
P
n
o
A
G
I
B
Fig. 12.
C
G
K
A
A
M
B
F
L
D
Fig. 15.
K
G
D
A
B
F
C
Fig. 16.
P
C
K
p
D
m
n
A
G
B
Fig. 18.
D
K
H
G
B
Fig. 19.
M
C
K
Q
H
m
P
F
y
O
a
A
G
I
L
N
B

eben die geometrische Evidenz und Schärfe beilege, welche irgend ein Saz im Euklides hat. Denn wer jezt noch im Stande ist, hieran zu zweifeln, den möchte ich wohl in seinen Zweifeln nicht weiter stöhren. Und so ist denn nun nicht nur die bisherige Lücke in der Elementar-Geometrie aufs angenehmste ausgefüllt, sondern auch zugleich die Grundlage zu einer Wissenschaft da, von welcher man bisher kaum den Gedanken der Möglichkeit fassen konnte, nämlich zur Meßkunst des Unendlichgrossen.

Halle, gedruckt bey Joh. Jac. Gebauer.

NOV 15 192

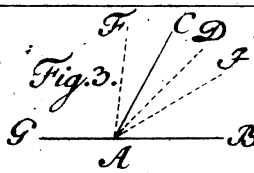


Fig. 3.

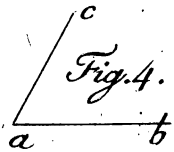
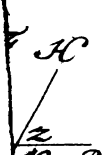


Fig. 4.



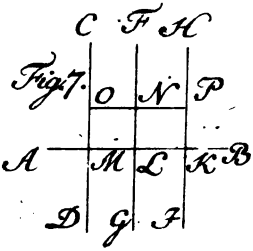


Fig. 7.

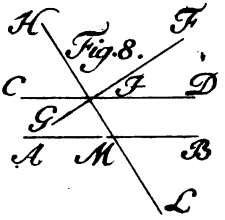
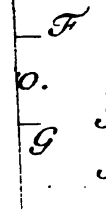


Fig. 8.



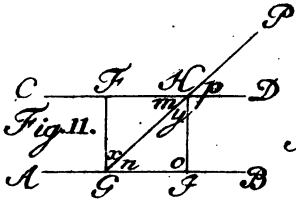


Fig. 11.

Fig. 12.

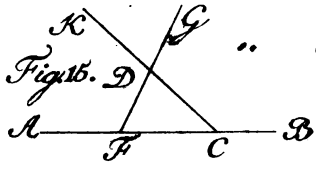


Fig. 15.

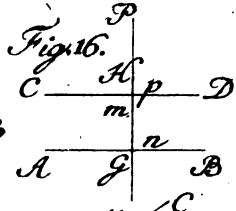


Fig. 16.

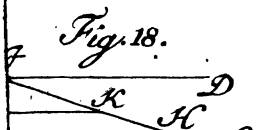


Fig. 18.

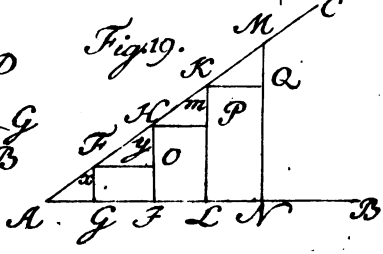


Fig. 19.

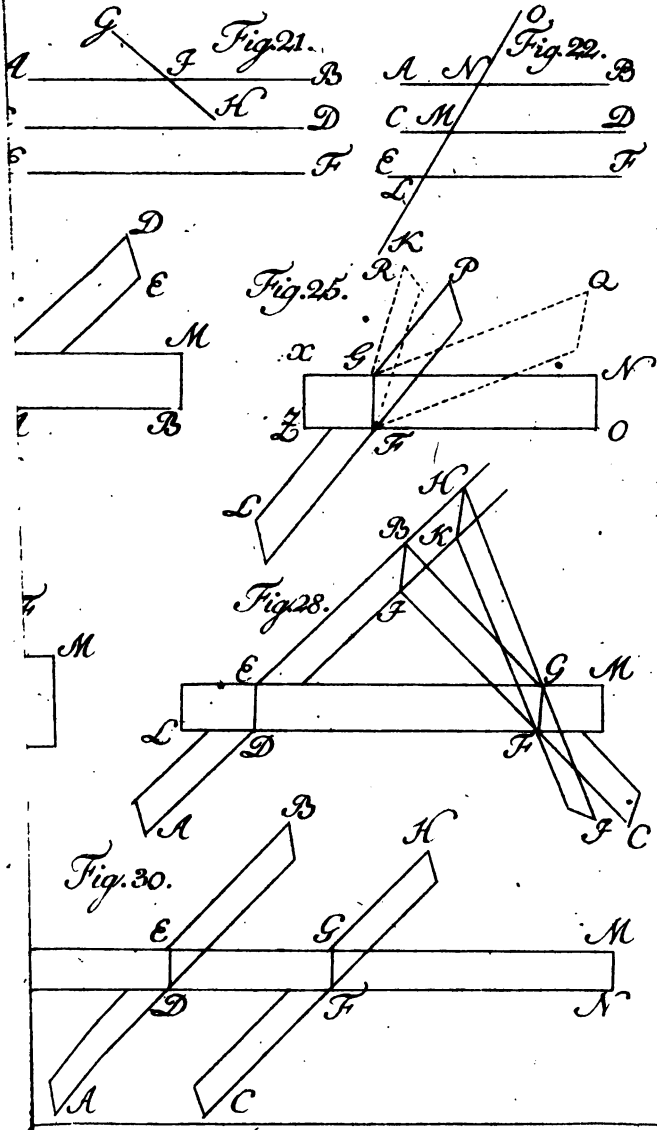


Fig. 21.
G
A
I
B
H
D
F
Fig. 22.
O
A
N
B
C
M
D
E
F
L
K
D
E
M
B
Fig. 25.
R
P
Q
x
G
N
Z
F
O
L
H
B
K
Fig. 28.
F
M
E
G
M
L
D
F
A
B
K
J
C
Fig. 30.
E
G
M
D
F
N
A
C